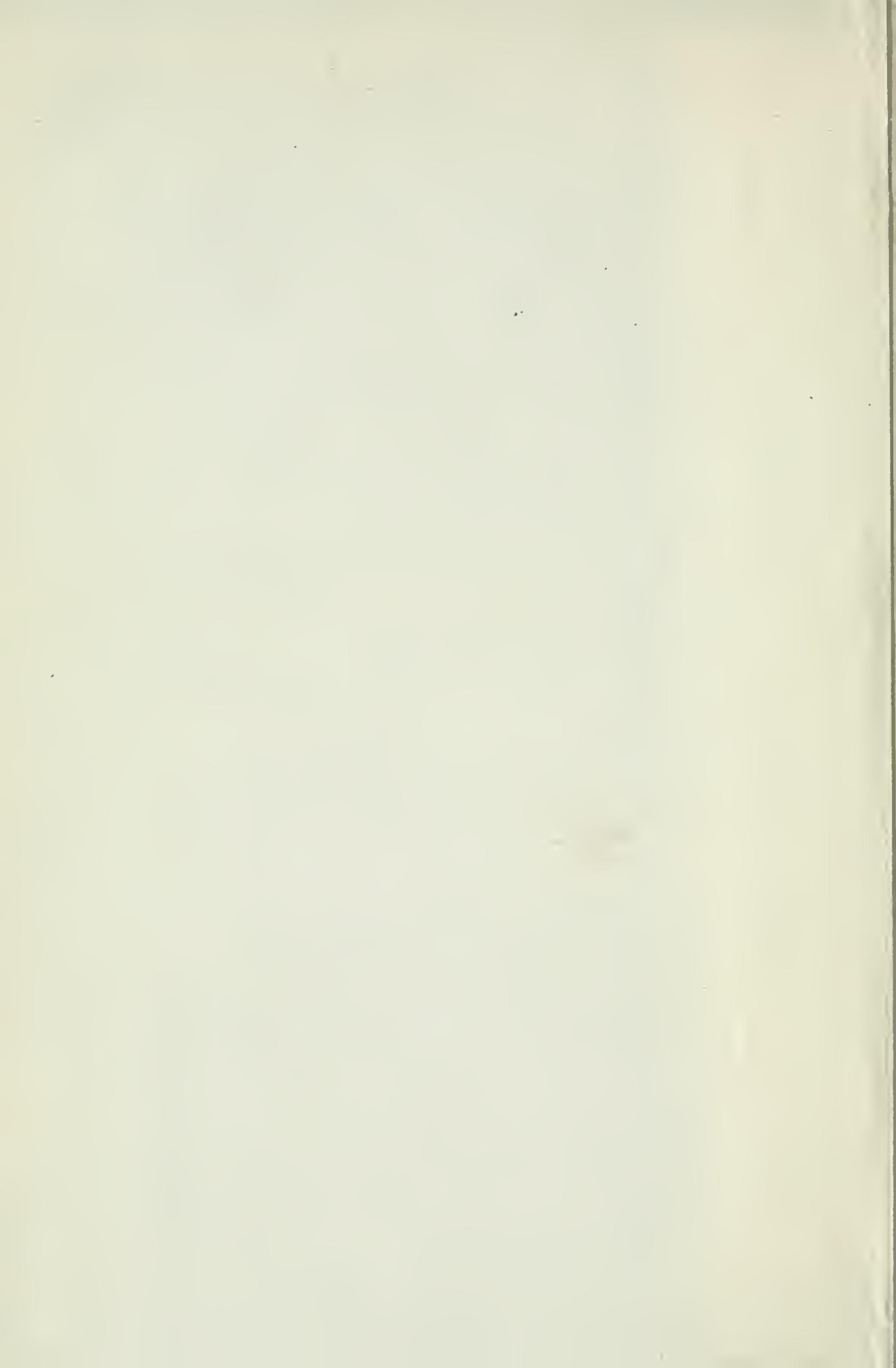
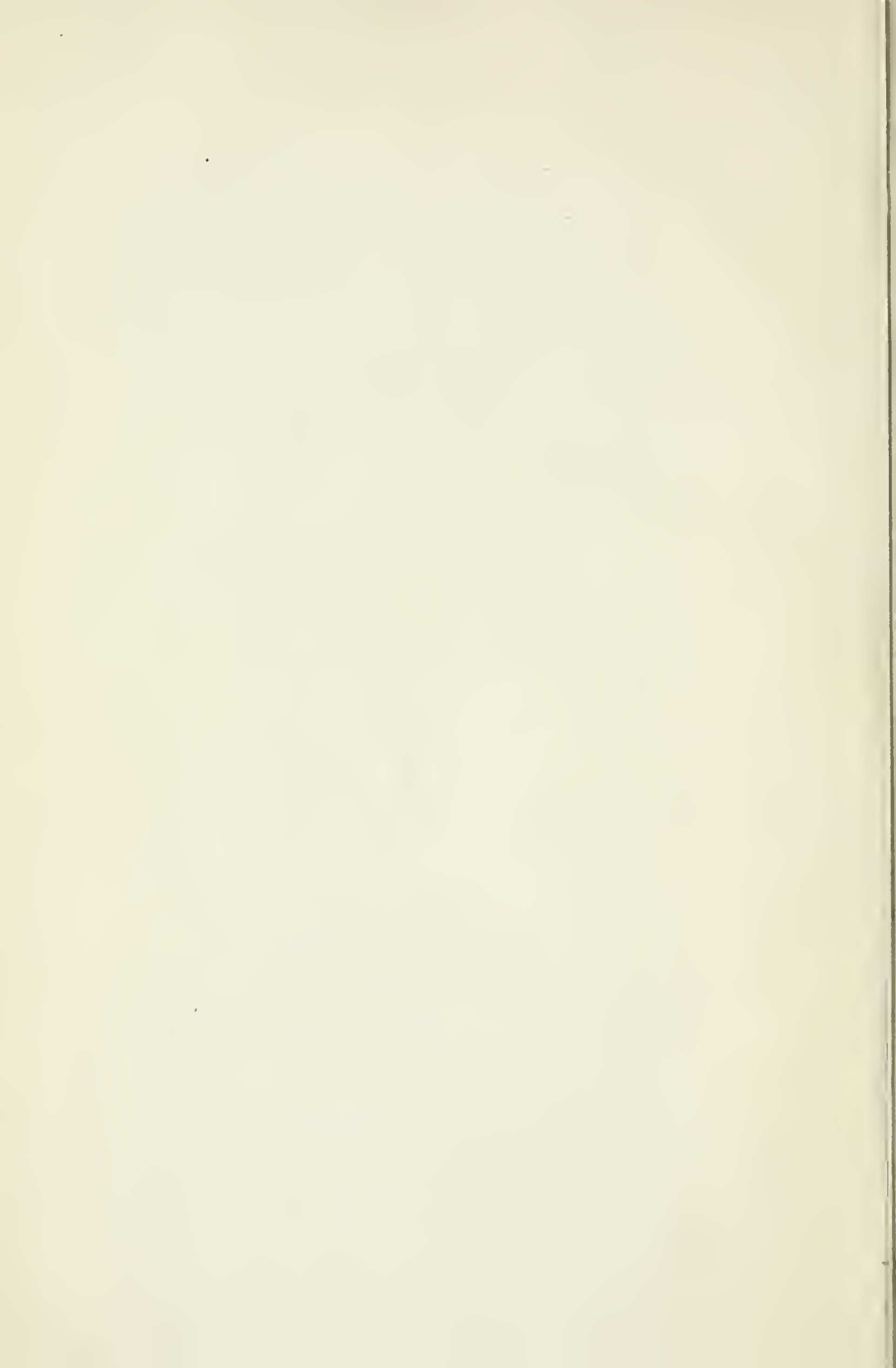

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01236457 6









Anfangsgründe

der

reinen Mathematik

für

den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Karl Koppe,

Professor und Oberlehrer am königlich preußischen Gymnasium zu Soest.

Dritter Theil.

Stereometrie.

Fünfte, verbesserte Auflage.

Mit 7 Figurentafeln.

Essen.

Druck und Verlag von G. D. Bädeker.

1855.

Die

Stereometrie

für den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Karl Koppe,
Professor und Oberlehrer am königlich preußischen Gymnasium zu Soest.

Fünfte, verbesserte Auflage.

Mit 7 Figurentafeln.

Essen.
Druck und Verlag von G. D. Bädeker.
1855.

Vorrede zur fünften Auflage.

Bei dieser neuen Auflage sind die Sätze über das körperliche Dreieck den Sätzen von der senkrechten Lage der Ebenen und Linien im Raume vorangestellt und letztere auf erstere gegründet worden. Schon in früheren Auflagen hatte der Verfasser die Grundlage für die Sätze von der senkrechten Lage dadurch gewonnen, daß zwei congruente rechtwinklige Dreiecke zum Decken gebracht wurden. Da jedoch diese nur einen besondern Fall des körperlichen Dreiecks überhaupt bilden, so mußte schon von vorn herein einleuchten, daß die ganze Behandlung sich wesentlich vereinfachen würde, wenn sich die allgemeine Theorie des körperlichen Dreiecks überhaupt jenen Sätzen voranstellen ließ.

Dieser Anordnung stand jedoch der Umstand hindernd entgegen, daß in den Lehrgebäuden der Stereometrie von den sechs Congruenzsätzen des körperlichen Dreiecks zwei bekanntlich mit Hilfe des Ergänzungsdreiecks erwiesen, also auf die Sätze von der senkrechten Lage gestützt werden. Nun bot sich zwar als nahe liegend der Ausweg dar, zuerst die vier andern Congruenzsätze aufzuführen, in deren Beweisen das Ergänzungsdreieck nicht hinzugezogen wird, dann die Lehre von der senkrechten Lage, für deren Begründung diese Sätze vollständig ausreichen, und hierauf die beiden noch fehlenden Congruenzsätze vom körperlichen Dreieck folgen zu lassen. Eine solche Spaltung der Lehre von dem körperlichen Dreieck in zwei Theile und das Zwischenschieben eines umfangreichen Abschnitts zwischen diese einem einigen Ganzen angehörenden Theile erschien jedoch dem Verfasser so unnatürlich, den Erfordernissen eines wohlgeordneten Systems so gänzlich widerstreitend, daß derselbe auf die angegebenen Vortheile so lange verzichtet hat, als es ihm nicht gelungen war, die Lehre vom körperlichen Dreiecke gänzlich unabhängig von den Sätzen über die senkrechte Lage zu entwickeln, um sie als ein zusammenhängendes Ganze jenen Sätzen voranstellen zu können.

Dieses schon lange erstrebte Ziel ist der Verfasser bald nach dem Erscheinen der vierten Auflage dieses Lehrbuches zu erreichen so glücklich

gewesen, und hat derselbe die aufgefundene Lösung der angeführten Aufgabe zuerst in dem Programme des Gymnasiums zu Soest vom Jahr 1853 veröffentlicht. Das Erscheinen dieser neuen Auflage aber bietet dem Verfasser die sehr erwünschte Gelegenheit dar, die erzielte Verbesserung zum Besten der Schüler in Anwendung bringen zu können.

Von den beiden Haupttheilen der Stereometrie, von denen der eine die gegenseitige Lage der Linien und Ebenen im Raume, der andere die Ausmessung der vollständig begrenzten Körper zum Gegenstande hat, beruht die Bedeutung des Letztern vorzüglich auf der praktischen Wichtigkeit seiner Resultate. Als ein besonders förderſames Bildungsmittel für den Unterricht kann dieser Theil schon darum weniger gelten, als nur die Regel für die Ausmessung der Prismas — und auch diese zum Theil mit Hilfe schwerfälliger, zu der Einfachheit der zu erschließenden Wahrheit in keinem Verhältnisse stehender Beweise — eine streng wissenschaftliche Begründung zuläßt, eine solche aber nicht blos für die runden Körper, sondern auch für die Pyramide, also, mit alleiniger Ausnahme des Prismas, für die eckigen Körper überhaupt gänzlich fehlt.

Der andere Theil dagegen, welcher von der Lage der Linien und Ebenen im Raume handelt, erweist sich als besonders anziehend und lehrreich dadurch, daß die in demselben zu erörternden Begriffe, nachdem sie schon in ganz analoger Weise in der Planimetrie, jedoch in der diesem Zweige der Geometrie eigenthümlichen Beschränktheit hervorgetreten sind, nun in der Stereometrie in voller Allgemeinheit durchgeführt werden. Indem so die analogen Sätze der Planimetrie sich als besondere Fälle der allgemeinen Wahrheiten der Stereometrie darstellen und zum Theil in dieser unbedingte Giltigkeit behalten, zum Theil mit dem Niederreißen der Schranken der Planimetrie in der Stereometrie ihren Stützpunkt verlieren, ergibt sich zwischen den Lehren beider Disciplinen neben vielfacher Uebereinstimmung andererseits oft in der überraschendsten Weise die mannigfachste Verschiedenheit. Ja man wird noch überdieß behaupten können, daß die Stereometrie zugleich eine gründlichere Einsicht in die betreffenden Lehren der Planimetrie eröffnet, indem sich dieselben dem durch keine Schranken mehr beengten Blicke von dem höheren Standpunkte der Stereometrie aus in ihrem Verhältnisse als Besonderheiten zur Allgemeinheit darstellen.

Für jenen Haupttheil der Stereometrie, dessen hohe Bedeutung für den Unterricht wir hier hervorzuheben versucht haben, ist bei dieser neuen

Auflage durch den oben angegebenen Entwickelungsgang, in Folge dessen sich die einzelnen Lehren in der natürlichsten Weise an einander reihen und die später folgenden fast von selbst aus den vorangehenden hervorfließen, eine Einfachheit der Ableitungen und eine Uebersichtlichkeit des systematischen Zusammenhanges gewonnen worden, welche, wie der Verfasser hofft, eben so sehr dazu beitragen wird, dem Schüler das Studium dieses Theiles der Mathematik zu erleichtern, als das Interesse an diesem Studium zu fördern.

Soest, im September 1855.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

Bemerkung 1. Nach der dreifachen Ausdehnung des Raumes zerfällt die Geometrie (Raumlehre) in drei Theile: Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie. Die Longimetrie *) beschränkt sich auf die Betrachtung einer einzigen Ausdehnung, die Planimetrie betrachtet das nach zwei Richtungen Ausgedehnte, läßt aber die dritte Ausdehnung noch unberücksichtigt; die Stereometrie nimmt zugleich auf alle drei Ausdehnungen Rücksicht. Die Longimetrie stellt alle ihre Betrachtungen in einer geraden Linie an; die Planimetrie ist mit ihren Constructionen an ein und dieselbe ebene Fläche gebunden, über welche sie nicht hinausgeht; ihre Objekte liegen entweder wirklich in derselben Ebene oder können doch als in derselben Ebene liegend vorgestellt werden. Nur die Stereometrie kennt keine Beschränkung und darf sich frei im Raume nach allen drei Richtungen hin bewegen.

Die Longimetrie kann es allein mit geraden Linien zu thun haben; die krumme Linie und die ebene Fläche, da an ihnen zugleich zwei Dimensionen auftreten, gehören der Planimetrie an; eben so können krumme Flächen und Körper, da sie nicht mehr in eine Ebene gebracht werden können, da an ihnen zugleich drei Dimensionen auftreten, allein Gegenstand der Stereometrie sein.

So wie aber die Planimetrie sich keineswegs auf die Vergleichung des Inhalts und auf die Ausmessung der vollständig begrenzten ebenen Flächen (Abschnitt 7, 9 und 10 der Planimetrie) beschränkt, sondern diejenigen Sätze, welche sich auf die gegenseitige Abhängigkeit der Länge und Lage gerader Linien beziehen, den bei weitem größten Theil der Planimetrie (Abschnitt 1 — 6 und 8 der Planimetrie) ausmachen, so hat es auch die Stereometrie weder ausschließlich, noch vorzugsweise mit der Ausmessung der vollständig begrenzten Körper zu thun; vielmehr bilden die Sätze über die gegenseitige Lage der Linien und Ebenen im Raume (sowohl in theoretischer, als praktischer Hinsicht), wenn nicht den wichtigsten, doch gewiß einen eben so wichtigen Theil der Stereometrie (Abschnitt 1 — 4 in diesem Lehrbuche).

*) Vergl. die Anm. zu §. 3 der Planimetrie.

Bemerkung 2. Die Ebene selbst, in welcher die Planimetrie alle ihre Constructionen auszuführen hat, kann offenbar in der Planimetrie niemals Gegenstand der Betrachtung werden, da ein Betrachten dieser Ebene zugleich ein Heraustreten aus derselben, also ein Verlassen des Feldes der Planimetrie fordert. Durch dieses Heraustreten aus der einen Ebene, an welche die Planimetrie gebunden war, ist der erste Schritt in die Stereometrie gethan. Diese Ebene, welche in der Planimetrie immer nur eine war, ist nun in der Stereometrie zu einer unendlich mannigfaltigen geworden, (im Raume existiren unendlich viele verschiedene Ebenen,) und es bedarf, um aus dieser unendlichen Mannigfaltigkeit eine bestimmte Ebene herauszuheben, eines Mittels, ihre Lage festzustellen.

Die Lage einer Linie (in der Ebene oder im Raume) ist durch zwei Punkte gegeben. Zwei Punkte allein aber, da sie nur eine Linie (eine Ausdehnung) bestimmen, können nicht hinreichen, die Lage einer Ebene festzustellen, indem bei dieser noch eine zweite Ausdehnung hinzukommt. Es bedarf hier noch einer zweiten Linie oder eines dritten Punktes, welcher, mit einem der beiden andern Punkte verbunden, eine zweite Linie liefert. — Diese Ueberlegungen führen zu dem folgenden Satze.

§. 1. Grundsatz.

1) Die Lage einer Ebene ist durch drei Punkte gegeben, welche nicht in gerader Linie liegen; d. h. durch jede drei Punkte läßt sich eine Ebene legen, und durch drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, kann nur eine einzige Ebene gelegt werden.

§. 2. Zusatz.

Da durch zwei willkürliche Punkte einer Linie *) diese in ihrer ganzen Ausdehnung gegeben ist und umgekehrt mit einer Linie auch alle ihre Punkte gegeben sind, so folgt hieraus ferner: die Lage einer Ebene ist auch gegeben:

2) durch eine Linie und einen Punkt außerhalb derselben, so wie auch

3) durch zwei sich schneidende Linien; — diese lassen sich nehmlich, indem man zum gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte einen willkührlichen Punkt auf jeder der beiden gegebenen Linien hinzufügt, auf drei Punkte zurückführen.

Dagegen ist es nicht allemal möglich, durch vier Punkte oder durch zwei willkürliche Linien im Raume eine Ebene zu legen, wohl aber durch zwei parallele Linien, da diese immer als in einer Ebene liegend gedacht werden. — Die Lage einer Ebene ist daher auch gegeben:

4) durch zwei parallele Linien.

§. 3. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden §. ergiebt sich weiter

1) durch zwei Punkte oder eine Linie allein lassen sich unzählige Ebenen legen; und umgekehrt

2) wenn zwei Ebenen mehrere Punkte gemeinschaftlich haben, so müssen diese alle in einer geraden Linie liegen, — da sich durch drei nicht in gerader

*) Wenn hier und im Folgenden das Wort „Linie" ohne Beiwort gebraucht wird, so ist in der Regel darunter die gerade Linie zu verstehen.

Linie liegende Punkte nach §. 1 nicht zwei, sondern nur eine einzige Ebene legen läßt.

3) Auf einer Linie lassen sich in einem gegebenen Punkte unzählige Lothe aufrichten, — da durch die Linie unzählige Ebenen gelegt werden können, und in jeder derselben auf der gegebenen Linie in dem gegebenen Punkte sich ein Loth errichten läßt. — Dagegen kann

4) auf eine Linie aus einem außerhalb gegebenen Punkte nur ein Loth gefällt werden, — da durch die Linie und den Punkt außer ihr die Lage der Ebene festgestellt ist. Eben so kann

5) durch einen Punkt außerhalb einer Linie mit derselben nur eine einzige Parallele gezogen werden.

Anm. Die §§. 42, 3 und 47, 3 der Planimetrie behalten also auch in der Stereometrie unbedingte Giltigkeit, während §. 31 für die Stereometrie nur dann gilt, wenn zugleich die Lage der Ebene gegeben ist, in welcher das Loth errichtet werden soll.

§. 4. Erklärung.

Zwei Ebenen können in zweifacher Lage gedacht werden; entweder

1) sie schneiden sich und ihr Durchschnitt ist nach §. 3, 2 eine gerade Linie — oder

2) sie treffen in keinem Punkte zusammen und werden dann **parallel** genannt *).

Statt des Wortes Durchschnittslinie sagt man auch kürzer: **Kante**.

§. 5. Erklärung.

Eine (unbegrenzte) gerade Linie kann in dreifacher Lage gegen eine Ebene gedacht werden: entweder

1) sie liegt ganz in der Ebene, oder

2) sie schneidet dieselbe in **einem Punkte**, oder

3) sie hat mit der Ebene keinen Punkt gemeinschaftlich und heißt dann der Ebene **parallel**.

§. 6. Erklärung.

Auch zwei Linien im Raume können dreifach gegen einander liegen; entweder

1) sie (liegen in derselben Ebene und) schneiden sich, oder

2) sie (liegen in derselben Ebene und schneiden sich nicht, d. h. sie) laufen parallel, oder

3) sie liegen nicht in derselben Ebene; (sie schneiden sich also nicht und sind auch nicht parallel.) Man sagt dann: die Linien **kreuzen sich**.

---

*) Die Möglichkeit paralleler Ebenen werden wir später in §. 17 nachweisen.

Erster Abschnitt.

Von Linien in sich schneidenden und parallelen Ebenen.

A. Linien in Ebenen, welche sich schneiden.

Bemerkung. So wie in den Sätzen der Planimetrie über die Lage der Punkte und Linien in einer Ebene nicht zunächst Punkte mit Punkten oder mit Linien unmittelbar verglichen, sondern allezeit die Punkte unter sich und mit den in Betracht zu ziehenden Linien durch Linien verbunden werden, so schließen wir auch in der Stereometrie fortwährend Punkte und Linien durch Ebenen an einander und an gegebene Ebenen an und beginnen demgemäß mit zwei sich schneidenden Ebenen.

§. 7. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Ebenen ABM und ABN (Fig. 1) sich schneiden und eine Linie CD in der einen Ebene ABM gezogen die Kante AB in einem Punkte D durchschneidet, so schneidet sie in diesem Punkte offenbar auch die andere Ebene ABN; und umgekehrt,

2) wenn eine Linie in der einen von zwei sich schneidenden Ebenen gezogen die andere Ebene schneidet, so muß sie auch die Kante schneiden.

Beweis zu 2. Denn wenn die Linie EF in der Ebene ABM (verlängert) mit der Ebene ABN in einem Punkte (X) zusammentrifft, so gehört dieser Punkt so wohl der Ebene ABM, als auch der Ebene ABN an und muß folglich auf der (verlängerten) Kante AB liegen, da diese Linie alle Punkte enthält, welche beiden Ebenen gemeinschaftlich sind. Demnach schneidet die (verlängerte) Linie EF auch die (verlängerte) Kante AB (in dem Punkte X).

Bemerkung. Aus den Behauptungen des vorhergehenden §. ergiebt sich auf der Stelle, daß wenn zwei Ebenen sich schneiden und eine Linie in der einen Ebenen gezogen der Durchschnittslinie parallel ist, sie auch der anderen Ebene parallel sein muß, und 2) daß wenn eine Linie in der einen von zwei sich schneidenden Ebenen gezogen der andern Ebene parallel läuft, dieselbe auch der gemeinschaftliche Kante beider Ebenen parallel ist. Wir geben jedoch um größerer Bequemlichkeit der Anwendung Willen diesen beiden Sätzen die in den beiden folgenden §§. ausgesprochene Fassung.

§. 8. Lehrsatz.

Eine Linie AB (Fig. 2) ist einer Ebene MN parallel, wenn sie einer in derselben gezogenen Linie CD parallel ist.

Beweis. Wenn wir durch die parallelen Linien AB und CD eine Ebene legen, so schneidet diese die Ebene MN in der Kante CD. Wenn nun AB der Ebene MN nicht parallel wäre, sondern (verlängert) dieselbe in einem Punkte (X) durchschnitte, so müßte sie nach Nro. 2 des vorhergehenden §. auch die (verlängerte) Kante CD durchschneiden, was gegen die Voraussetzung streitet. Demnach ist AB der Ebene MN parallel.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn eine Linie AB (Fig. 2) einer Ebene MN parallel ist, so ist sie auch der Durchschnittslinie CD parallel, in welcher eine durch die gegebene Linie AB gelegte Ebene die gegebene Ebene MN durchschneidet.

Beweis. Die Linien AB und CD liegen erstens zu Folge der Voraussetzung in einer Ebene und können sich zweitens auch nicht schneiden, weil sonst die Linie AB auch die Ebene MN in dem nehmlichen Punkte treffen würde, was gegen die Voraussetzung streitet. Folglich ist AB || CD.

§. 10. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Linien AB und CD (Fig. 3) parallel laufen und die eine AB eine Ebene MN durchschneidet, so muß auch die andere CD (verlängert) diese Ebene durchschneiden.

Beweis. Denn wenn wir durch die parallelen Linien AB und CD eine Ebene legen, welche die Ebene MN in der Linie EF durchschneidet, so muß die Linie AB, da sie nach der Voraussetzung die Ebene MN im Punkte B durchschneidet, in diesem Punkte nach §. 7, 2 auch die Kante EF durchschneiden. Da ferner die Linie CD || AB vorausgesetzt ist und die Linien AB, CD und EF in einer Ebene liegen, so muß die (verlängerte) Linie CD nach der Planimetrie auch die Linie EF schneiden. Folglich schneidet CD auch die Ebene MN.

2) Wenn daher von zwei parallelen Linien die eine einer Ebene parallel ist, so muß die andere dieser Ebene ebenfalls parallel sein. Denn wenn eine derselben die gegebene Ebene schnitte, so müßte nach Nro. 1 auch die andere diese Ebene schneiden, was gegen die Voraussetzung streitet.

Bemerkung. Wir haben uns bisher darauf beschränkt, in der einen von zwei sich schneidenden Ebenen Linien zu ziehen. Wenn wir jetzt Linien in beiden Ebenen ziehen und diese Linien mit einander zu vergleichen suchen, so finden wir bald, daß diese Vergleichung wesentlich dadurch bedingt wird, ob die beiden Linien selbst in einer Ebene liegen oder nicht. Wir werden daher zweckmäßiger so fortfahren, daß wir zu den gegebenen Ebenen eine dritte beide durchschneidende Ebene hinzufügen. Wollten wir diese Ebene aber durch die Kante der gegebenen Ebenen legen, so würde keine neue Durchschnittslinie entstehen. Wir nehmen daher besser die dritte Ebene so an, daß sie nicht durch die Kante geht, und gelangen auf diese Art zu drei in drei Kanten sich durchschneidenden Ebenen. Vergleichen wir zunächst zwei von diesen Kanten, so zeigt sich uns sogleich, daß wir die beiden Fälle zu unterscheiden haben, welche der folgende §. behandelt.

§. 11. Lehrsatz.

1) Wenn drei Ebenen ABCD, ABEF und CDEF (Fig. 4) sich in drei Kanten AB, CD und EF schneiden, und zwei von diesen Kanten AB und CD in irgend einem Punkte G zusammentreffen, so muß auch die dritte Kante EF durch diesen nehmlichen Punkt G gehen.

Beweis. Nach der Voraussetzung gehen die verlängerten Linien AB und CD beide durch den Punkt G; dieser Punkt muß daher so wohl in der erweiterten Ebene ABEF, als auch in der erweiterten Ebene CDEF liegen; und es muß folglich auch die verlängerte Kante EF durch den Punkt G gehen, weil alle Punkte, welche zweien Ebenen gemeinschaftlich sind, in ihrer Durch-

schnittslinie liegen. — Demnach schneiden sich die Verlängerungen aller drei Kanten AB, CD und EF in dem nehmlichen Punkte G, w. z. b. w.

2) Wenn daher drei Ebenen sich in drei Kanten AB, CD und EF (Fig. 5) durchschneiden und zwei derselben, z. B. AB und CD, parallel sind, so laufen sie alle drei parallel.

Beweis. Denn wenn die (verlängerte) Linie EF eine der beiden andern Kanten AB oder CD in irgend einem Punkte (X) schnitte, so müßten sich nach Nro. 1 auch AB und CD in diesem Punkte schneiden, was gegen die Voraussetzung streitet. Folglich ist auch EF mit AB und CD parallel.

§. 12. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden merkwürdigen Satze, (zu welchem die Planimetrie kein Analogon darbietet,) folgt, daß, wenn drei Ebenen sich in drei Linien durchschneiden, überhaupt nur zwei Fälle möglich sind: entweder alle drei Kanten vereinigen sich in dem nehmlichen Punkte, oder sie laufen alle drei parallel.

§. 13. Lehrsatz.

Wenn in jeder von zwei sich schneidenden Ebenen eine Linie gezogen ist, so können überhaupt folgende Fälle stattfinden:

1) Die beiden Linien CD und EF (Fig. 4) treffen (verlängert) in einem Punkte G zusammen; dann geht auch die beiden Ebenen gemeinschaftliche Kante AB (verlängert) durch diesen Punkt G.

Beweis. Denn wenn wir durch die sich schneidenden Linien CD und EF eine Ebene legen, so erhalten wir drei Ebenen, welche sich in den drei Kanten AB, CD und EF schneiden, und da von diesen zwei CD und EF nach der Voraussetzung in einem Punkte G zusammentreffen, so muß nach §. 11, 1 auch die dritte AB durch den nehmlichen Punkt G gehen.

2) Wenn in zwei sich schneidenden Ebenen zwei Linien CD und EF (Fig. 5) einander parallel laufen, so sind dieselben auch der Kante AB parallel.

Beweis. Denn wenn wir durch durch die als parallel vorausgesetzten Linien CD und EF eine Ebene legen, so entstehn drei Ebenen, welche sich in den drei Kanten AB, CD und EF durchschneiden, und da von diesen zwei CD und EF als parallel vorausgesetzt sind, so müssen sie nach §. 11, 2 alle drei parallel sein, also ist auch AB mit CD und EF parallel.

3) Wenn in zwei sich schneidenden Ebenen zwei sich kreuzende Linien gezogen sind, so muß wenigstens eine derselben die Kante schneiden.

Beweis. Daß in zwei sich schneidenden Ebenen zwei sich kreuzende Linien CD und GH (Fig. 1) gezogen werden können, welche beide die Kante AB (in verschiedenen Punkten) schneiden, ist an sich klar. — Wir haben daher nur noch zu zeigen, daß, wenn die eine der sich kreuzenden Linien CD (Fig. 6) der Kante AB parallel ist, dann jedenfalls die andere GH (verlängert) die Kante AB schneidet. Um dieß zu zeigen, legen wir durch CD und einen beliebigen Punkt F auf GH eine Ebene, welche die Ebene ABN in der Linie EK durchschneidet. Dann erhalten wir drei Ebenen, welche sich in den drei Kanten AB, CD und EK durchschneiden, und da von diesen zwei AB und CD als parallel vorausgesetzt sind, so sind sie nach §. 11, 2 alle drei parallel; also ist auch EK parallel AB. Die Linie GH aber

schneidet EK und muß folglich auch die Linie AB, mit welcher sie in der nehmlichen Ebene ABN liegt, nach der Planimetrie durchschneiden.

§. 14. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien CD und EF einer dritten AB (Fig. 5) parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.

Beweis. Wenn alle drei Linien AB, CD und EF in einer Ebene liegen, so ist die Richtigkeit des Satzes bereits in der Planimetrie dargethan. Wenn dieses aber nicht der Fall ist, so läßt sich doch durch die Parallelen AB und CD und eben so durch die Parallelen AB und EF eine Ebene legen, wodurch zwei in der Kante AB sich schneidende Ebenen ABM und ABN hervorgehn. Nun können die in diesen Ebenen liegenden Linien CD und EF sich erstens nicht schneiden, weil sie sonst nach Nro. 1 des vorgehenden Paragraphen beide die Kante AB schneiden müßten, mit der sie doch als parallel vorausgesetzt sind. Zweitens können sich die Linien AB und CD auch nicht kreuzen, weil sonst nach Nro. 3 des vorhergehenden Paragraphen wenigstens eine derselben die Kante schneiden müßte, was ebenfalls gegen die Voraussetzung streitet. Hieraus folgt drittens, daß die Linien CD und EF, da sie sich nicht schneiden und auch nicht kreuzen können, einander parallel sind.

Anm. In dem so eben erwiesenen Satze haben wir gesehen, daß §. 42, 1 der Planimetrie auch in der Stereometrie unbedingte Gültigkeit hat. Dagegen sind die übrigen Sätze der Planimetrie über parallele Linien (§. 42, 2 — §. 47) nur dann auch in der Stereometrie richtig, wenn die in Betracht zu ziehenden Linien sämmtlich in einer Ebene liegen. Nur §. 48 gilt ohne diese Beschränkung auch in der Stereometrie, wie der folgende §. zeigt.

§. 15. Lehrsatz.

Zwei Winkel (ABC und DEF, Fig. 7), deren Schenkel parallel laufen (AB ∥ DE und BC ∥ EF) und von den Scheitelpunkten aus nach derselben Seite hin gezogen sind, sind gleich.

Beweis. Wenn die beiden Winkel in derselben Ebene liegen, so ist der Satz schon in der Planimetrie (§. 48) erwiesen; wenn aber die Winkel ABC und DEF in verschiedenen Ebenen liegen, so schneide man von ihren parallelen Schenkeln beliebige, aber gleiche Stücke von den Scheitelpunkten aus ab, nehmlich BG = EH und BK = EL, ziehe BE, GH und KL, ferner GK und HL; — dann ist BEHG ein Parallelogramm, weil BG ∥ und = EH ist; folglich ist auch BE ∥ und = GH. Ferner ist BELK ein Parallelogramm, da BK ∥ und = EL ist; also ist auch KL ∥ und = BE. Demnach muß auch GH ∥ und = KL sein, weil beide ∥ und = BE erwiesen sind; also ist auch GHLK ein Parallelogramm und

daher GK = LH;
ferner ist BG = EH } nach der Construction,
und BK = EL }

folglich △ BGK ≅ EHL
und Winkel ABC = DEF, w. z. e. w.

B. Linien in parallelen Ebenen.

§. 16. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Ebenen MN und PQ (Fig. 8) von einer dritten durchschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien AB und CD parallel.

Beweis. Die Linien AB und CD liegen erstens nach der Voraussetzung in derselben Ebene und können zweitens auch in keinem Punkte zusammentreffen, weil sonst auch in dem nehmlichen Punkte die Ebenen MN und PQ zusammentreffen würden, die doch als parallel vorausgesetzt sind. Folglich sind die Linien AB und CD parallel.

Bemerkung. Durch Umkehrung des so eben erwiesenen Satzes gelangt man zu dem folgenden, wobei man jedoch nicht außer Acht zu lassen hat, daß die Lage einer Ebene nicht durch eine Linie allein, wohl aber durch zwei sich schneidende Linien bestimmt wird.

§. 17. Lehrsatz.

Zwei Ebenen MN und PQ (Fig. 9) sind parallel, wenn zwei sich schneidende Linien AB und AC in der einen, zwei sich schneidenden Linien DE und DF in der andern parallel sind.

Beweis. Angenommen, die beiden Ebenen MN und PQ wären nicht parallel, sondern schnitten sich (erweitert) in irgend einer Linie (XZ). Dann müßte die Durchschnittslinie (XZ) zunächst AB parallel sein; denn wenn zwei Linien AB und DE in zwei sich schneidenden Ebenen MN und PQ einander parallel sind, so sind sie auch der Durchschnittslinie (nach §. 13, 2) parallel. Nach demselben Satze müßte aber auch die Durchschnittslinie (XZ) mit AC parallel sein, da auch AC und DF als parallel vorausgesetzt sind. Es gingen folglich durch einen Punkt A zwei Linien AB und AC, welche beide einer dritten (XZ) parallel wären. Da dieses nicht möglich ist, so können sich auch die Ebenen MN und PQ nicht schneiden, sondern sind parallel.

Anm. Wenn man streng wissenschaftlich verfahren will, so muß man §. 17 dem §. 16 vorangehen lassen; um größerer Anschaulichkeit Willen hat die hier befolgte Anordnung den Vorzug erhalten. Durch den §. 17 werden wir nun auch in den Stand gesetzt, die folgende Aufgabe zu lösen.

§. 18. Aufgabe.

Mit einer Ebene PQ (Fig. 9) durch einen außerhalb derselben gegebenen Punkt A eine parallele Ebene zu legen.

Auflösung. Durch einen beliebigen Punkt D der Ebene PQ ziehe man in derselben zwei sich schneidende Linien DE und DF und mit denselben durch den gegebenen Punkt A die parallelen Linien AB und AC; dann ist die durch diese Linien gelegte Ebene MN nach §. 17 mit PQ parallel.

§. 19. Zusatz.

1) Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene läßt sich mit derselben nur eine einzige parallele Ebene legen.

Beweis. Angenommen, es gingen durch den Punkt A (Fig. 10) zwei Ebenen PQ und PR, welche beide mit MN parallel wären; so lege man durch A und einen beliebigen Punkt B in MN eine willkührliche Ebene, welche

jedoch nicht durch die Kante PS geht; dann wird dieselbe die Ebenen MN, PQ und PR in drei Linien BC, AD und AE durchschneiden. Wenn nun die Ebenen PQ und PR beide mit MN parallel wären, so müßten auch die Durchschnittslinien AD und AE beide mit BC parallel sein, was doch nicht möglich ist, da durch einen Punkt nicht zwei Linien mit einer dritten parallel gezogen werden können. — Demnach können auch nicht die Ebenen PQ und PR beide mit MN parallel sein. — Hieraus ergibt sich weiter:

2) Eine Ebene PR (Fig. 10), welche die eine von zwei parallelen Ebenen, nehmlich PQ, durchschneidet, muß auch die andere MN schneiden.

Beweis. Denn wenn PR die Ebene MN nicht schnitte, sondern mit derselben parallel wäre, so gingen durch den nehmlichen Punkt zwei zu MN parallele Ebenen, welches nach Nro. 1 unmöglich ist.

3) Zwei Ebenen α und β, welche einer dritten γ parallel sind, müssen auch unter sich parallel sein.

Beweis. Denn wenn α und β in irgend einem Punkte zusammenträfen, so gingen durch diesen Punkt zwei Ebenen, welche einer dritten γ parallel wären, was nach Nro. 1 unmöglich ist *).

§. 20. Zusatz.

1) Wenn zwei Ebenen MN und PQ (Fig. 11) parallel sind, so ist jede Linie AB, welche der einen Ebene MN parallel ist, auch mit der andern Ebene PQ parallel.

Beweis. Man lege durch AB eine beliebige Ebene, welche die Ebenen MN und PQ in CD und EF durchschneidet. Da die Linie AB nach der Voraussetzung der Ebene MN parallel ist, so muß sie auch nach §. 9 der Durchschnittslinie CD parallel sein; und da ferner die Ebenen MN und PQ parallel sind, so sind auch nach §. 16 die Durchschnittslinien CD und EF parallel. Demnach muß auch AB || EF und folglich auch AB mit der Ebene PQ parallel sein, weil sie einer in derselben gezogenen Linie als parallel erwiesen ist. — Es folgt hieraus weiter:

2) Eine Linie BG (Fig. 11), welche die eine von zwei parallelen Ebenen PQ durchschneidet, muß auch die andere MN schneiden.

Beweis. Denn wenn die Linie BG mit der Ebene MN parallel wäre, so müßte sie nach Nro. 1 auch mit der Ebene PQ parallel sein, was gegen die Voraussetzung streitet **).

3) Parallele Linien AB und CD (Fig. 12) zwischen parallelen Ebenen MN und PQ sind gleich.

Beweis. Man lege durch die parallelen Linien AB und CD eine Ebene, so schneidet diese die beiden parallelen Ebenen MN und PQ nach §. 16 in zwei parallelen Linien AC und BD; folglich ist ABDC ein Parallelogramm und daher AB = CD.

Anm. Auch folgende Sätze sind leicht zu erweisen:

1) Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie von drei parallelen Linien, welche nicht in derselben Ebene liegen, gleiche Stücke abschneiden.

---

*) Dasselbe läßt sich auch mit Hülfe vom §. 16 und 17 leicht direct erweisen.

**) Dasselbe kann auch direct mit Zuziehung von §. 44 der Planimetrie erwiesen werden, wie leicht aus dem Anblicke der Figur hervorgeht.

2) Wenn eine Linie und eine Ebene parallel sind, so sind alle zwischen beiden gezogenen parallelen Linien einander gleich.

3) Eine Linie ist einer Ebene parallel, wenn zwei zwischen beiden gezogene parallele Linien einander gleich sind.

4) Laufen zwei Ebenen parallel, so ist jede in der einen gezogene Linie der andern Ebene parallel.

5) Zwei Ebenen sind parallel, wenn zwei sich schneidende Linien in der einen der andern Ebene parallel sind.

6) Gehen aus einem Punkte mehrere Linien, welche einer Ebene parallel sind, so liegen diese alle in einer Ebene, welche der gegebenen Ebene parallel ist.

7) Schneiden sich zwei Ebenen, so kann durch einen Punkt in der einen nur eine einzige der anderen parallele Linie gezogen werden.

8) Ist eine Linie zweien sich schneidenden Ebenen parallel, so ist sie auch der Kante parallel.

9) Wenn zwei sich schneidende Ebenen zweien sich schneidenden Ebenen parallel sind, so sind auch ihre Kanten parallel.

10) Wenn eine Linie und eine Ebene parallel sind, so muß jede Ebene, welche die Linie schneidet, auch die ihr parallele Ebene schneiden.

11) Wenn zwei Linien sich kreuzen, (nicht in derselben Ebene liegen,) so läßt sich durch jede eine der andern parallele Ebene legen, und diese beiden Ebenen sind auch unter sich parallel.

Zweiter Abschnitt.

Vom Flächenwinkel.

§. 21. Erklärung.

Der unendliche Raum, welcher zwischen zwei Ebenen liegt, die in einer Linie zusammenstoßen, heißt ein Flächenwinkel. Die Ebenen, welche den Flächenwinkel einschließen, heißen die Schenkel, und die Linie, welche sie gemeinschaftlich haben, die Kante oder Scheitellinie des Flächenwinkels.

Ein Flächenwinkel entsteht, wenn man eine Ebene, die an einer Seite durch eine Linie begrenzt gedacht wird, um diese Linie (als Axe) dreht.

Zwei Flächenwinkel werden gleich genannt, wenn sie sich so zusammenlegen lassen, daß ihre Scheitellinien und beide Paar Schenkel sich decken, — ungleich, wenn dieses nicht stattfindet. — Größer. — Kleiner.

Anm. Zur Bezeichnung eines Flächenwinkels sind vier Buchstaben erforderlich, zwei für die Kante und zwei für Punkte in den Schenkeln außerhalb der Kante, (nehmlich für jeden Schenkel einer). Von den letzten beiden Buchstaben wird bei der Benennung des Flächenwinkels der eine an den Anfang, der andere an das Ende gestellt, während die beiden für die Kante in die Mitte kommen; der in Figur 13 vorgestellte Flächenwinkel kann also ABCD oder ACBD oder DBCA oder DCBA genannt werden; in jeder dieser Ausdrucksweisen geben die drei ersten Buchstaben

den einen Schenkel, die drei letzten den andern an. — Der Anfänger wird wohl thun, zu beachten, daß die Größe des Flächenwinkels, so wie die des Linienwinkels, von der Größe der verzeichneten Schenkel ganz unabhängig ist.

§. 22. Erklärung.

Ein Flächenwinkel, dessen beide Schenkel in einer Ebene liegen, heißt ein flacher, und da, wie man leicht sieht, alle flachen Flächenwinkel gleich sind, so nennt man eben so, wie in der Planimetrie, einen Flächenwinkel hohl oder erhaben, je nachdem er kleiner oder größer, als ein flacher ist.

Im Folgenden wird fast ausschließlich nur von hohlen Flächenwinkeln die Rede sein.

§. 23. Erklärung.

Zwei (hohle) Flächenwinkel, welche die Kante und einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und deren beide andere Schenkel in einer Ebene liegen, heißen Nebenflächenwinkel.

Scheitelflächenwinkel sind solche, welche die Kante gemeinschaftlich haben, und deren gegenüberstehende Schenkel in einer Ebene liegen.

§. 24. Zusatz.

1) Die Summe zweier Nebenflächenwinkel ist ein Flacher.

2) Scheitelflächenwinkel sind gleich.

Der Beweis ist derselbe wie in der Planimetrie (§. 23 und 25).

§. 25. Erklärung.

Ein Flächenwinkel, der seinem Nebenflächenwinkel gleich ist, heißt ein rechter, und zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn sie rechte Flächenwinkel bilden.

Da alle rechten Flächenwinkel (als Hälften des Flachen) gleich sind, so kann man eben so, wie in der Planimetrie, diejenigen Flächenwinkel, welche keine rechten sind, schiefe nennen und diese dann wieder in spitze und stumpfe eintheilen.

§. 26. Zusatz.

1) Zwei rechte Flächenwinkel machen zusammen einen Flachen aus.

2) Der spitze Flächenwinkel hat einen stumpfen und der stumpfe Flächenwinkel einen spitzen zum Nebenwinkel.

3) Durch eine Linie in einer Ebene läßt sich nur eine Ebene legen, welche auf der gegebenen Ebene senkrecht ist.

Die Beweise sind die nehmlichen wie für die ähnlich lautenden Sätze der Planimetrie (§. 29 und 31).

§. 27. Erklärung.

Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten durchschnitten werden (Fig. 14), so kann man die entstandenen acht hohlen Flächenwinkel eben so, wie in der Planimetrie (§. 37), in Gegenwinkel, Wechselwinkel und Ergänzungswinkel eintheilen.

Es gelten aber offenbar auch von diesen Flächenwinkeln aus ganz gleichen Gründen dieselben Sätze, wie von den Linienwinkeln in der Planimetrie (§. 38—40).

§. 28. Lehrsatz *).

Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie von einer dritten in zwei parallelen Linien durchschnitten werden, und entweder

1) ein paar Gegenwinkel oder
2) ein paar Wechselwinkel gleich sind, oder
3) ein paar Ergänzungswinkel einen Flachen betragen.

Beweis. Ist (Fig. 14) BC || FG und Flächenwinkel ABCD = AFGH, so ist nach dem vorhergehenden §. Flächenwinkel EBCG = BFGH und DBCG = BFGK; demnach lassen sich die Ebenen DBC, BCFG und FGH in ungeänderter gegenseitiger Lage mit der gegenüberstehenden Verbindung von Ebenen EBCFGK so zusammenlegen, daß Ebene BCFG wieder auf FGBC, nehmlich Kante BC auf FG und FG auf BC, Ebene BCD auf FGK und Ebene FGH auf BCE fällt. Angenommen nun, die Ebenen BCE und FGK durchschnitten sich (erweitert) in irgend einer Linie, so müßte diese Linie, da die Linien BC und FG parallel vorausgesetzt sind, nach §. 11, 2 mit BC und FG ebenfalls parallel sein, und in der nehmlichen Linie müßten sich auch die Ebenen BCD und FGH, da sie mit FGK und BCE zusammengefallen sind, durchschneiden. Dann schnitten sich aber die ganzen Ebenen EBCD und KFGH in zwei verschiedenen Linien, was offenbar unmöglich ist. Demnach können sich die Stücke EBC und KFG nicht schneiden; dasselbe gilt eben so von DBC und HFG, und die Ebenen ED und KH sind folglich parallel.

(2) und (3) sind vermöge des vorhergehenden §. unmittelbar Folgerungen aus (1).

§. 29. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten durchschnitten werden, so sind

1) die Gegenwinkel und
2) die Wechselwinkel gleich, und
3) die Ergänzungswinkel machen zusammen einen Flachen aus.

Beweis. 1) Wenn die Ebene ED || KH (Fig. 14) ist, und es wären die Gegenwinkel ABCD und AFGH ungleich, z. B. ABCD > AFGH, dann würde sich von ABCD ein Stück ABCM = AFGH abschneiden lassen, und es müßte nun nach dem vorhergehenden §. Ebene BCM || KH sein, was doch (nach §. 18) nicht möglich ist, da ED || KH gegeben ist.

(2) und (3) ergeben sich aus (1) durch §. 27.

Anm. Eben so wie in der Planimetrie (§. 45 — 48) lassen sich auch folgende Sätze erweisen:

1) Wenn zwei sich schneidende Ebenen von einer dritten in parallelen Linien durchschnitten werden, so betragen die inneren Ergänzungswinkel auf der Seite, auf welcher sich die Ebenen schneiden, zusammen weniger, auf der andern Seite mehr, als einen Flachen.

2) Wenn zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien geschnitten werden, und ein Paar innere Ergänzungswinkel zusammen weniger, als einen Flachen ausmachen, so schneiden sich die beiden Ebenen und zwar auf der Seite, auf welcher diese Winkel liegen.

3) Flächenwinkel, welche parallele Schenkel haben und sich nach derselben Seite hin öffnen, sind gleich.

---

*) Ehe zu diesem Satze übergegangen wird, sind vorher die Paragraphen *§. 41, *§. 42 und *§. 43 der Planimetrie durchzunehmen.

4) Ist von zwei parallelen Ebenen die eine auf einer dritten senkrecht, so ist auch die andere auf der dritten senkrecht.

Dagegen läßt sich nicht allemal behaupten, daß zwei Ebenen, welche auf einer dritten senkrecht stehen, parallel sind; dieß ist nur dann ganz gewiß wahr, wenn die senkrechten Ebenen von der dritten in parallelen Linien durchschnitten werden.

Aehnliches gilt von den Behauptungen (3) und (4) in §. 47 der Planimetrie.

Bemerkung. Wenn die richtige Auffassung stereometrischer Zeichnungen schon in so fern nicht ohne Schwierigkeit ist, als ganz gegen den eigenthümlichen Charakter der Stereometrie verschiedenen Ebenen angehörende Linien sämmtlich als in der nehmlichen Ebene liegend gezeichnet werden, so steigert sich diese Schwierigkeit noch durch den Umstand, daß in der Zeichnung sich Ebenen selbst gar nicht, sondern nur ihre Grenzen darstellen lassen, und daß daher unbegrenzt gedachten Ebenen, um sie in der Zeichnung für das Auge wahrnehmbar zu machen, willkürliche Grenzlinien, welche für die anzustellende Untersuchung gar nicht existiren und sich störend zwischen die als wesentlich in Betracht zu ziehenden Linien mischen, beigelegt werden müssen.

Da in den bisher behandelten Sätzen in Betreff des Durchschneidens unbegrenzt gedachter Ebenen besonders diejenigen Fälle hervorgehoben sind, in denen die Durchschnittslinien parallel laufen, so ist zweckmäßig den Ebenen in der Regel die Form von Parallelogrammen in der Zeichnung beigelegt worden. Indem aber bei dem im folgenden Abschnitte zu behandelnden körperlichen Dreiecke oder Vielecke die Kanten, in denen sich die Seitenflächen desselben durchschneiden, sämmtlich in dem nehmlichen Punkte, der Spitze, zusammenstoßen, stellt sich für diese Seitenflächen die Form von Kreisausschnitten, welche, mit einem willkürlichen, aber gleichen Radius beschrieben, die Spitze zum gemeinschaftlichen Mittelpunkte haben, als die einfachste und eben darum zweckmäßigste heraus. Ja es reicht sogar in der Zeichnung der den Ausschnitt begrenzende Bogen schon allein aus, um sowohl die Größe des zugehörigen Centriwinkels, als auch die Lage der Ebene desselben anzuzeigen, so daß in sehr vielen Fällen der Mittelpunkt, (die Spitze) und die von demselben ausgehenden Radien (die Seitenkanten) in der Zeichnung ganz entbehrt werden können.

Die bloße Betrachtung der in der angeführten Art ausgeführten Zeichnung des körperlichen Dreiecks oder Vielecks führt aber sofort zu der Wahrnehmung, daß die dargestellten Bogen sämmtlich der nehmlichen Kugelfläche angehören; es muß daher die Figur an Anschaulichkeit gewinnen, wenn die zwischen den zusammenstoßenden Bogen vorhandene Leere durch den umschlossenen Theil der betreffenden Kugelfläche ausgefüllt gedacht wird.

Um nun diese eben so einfache, als anschauliche Weise der Zeichnung des körperlichen Dreiecks oder Vielecks in der angegebenen Weise für den folgenden Abschnitt benutzen zu können, ist hier die Begriffserklärung der Kugel eingeschaltet. Diese Einschaltung hat jedoch lediglich die Bestimmung, ein Erleichterungsmittel für die Zeichnung zu gewähren; sie ist dagegen auf den systematischen Zusammenhang so gänzlich ohne Einfluß, daß es jedem Leser freisteht, ohne alle Störung des Zusammenhanges die eingeschalteten Paragraphen gänzlich zu überschlagen und in dem folgenden Abschnitte die Worte:

sphärisches Dreieck oder Vieleck und sphärischer Winkel, wo sie sich finden, zu streichen. Nur würde dann in den Figuren der öfters fehlende Kugelmittelpunkt, welcher mit M bezeichnet sein mag, hinzuzudenken und statt sphärisches Dreieck ABC körperliches Dreieck MABC, statt Seite AB, Seite AMB und statt sphärischer Winkel ABC Flächenwinkel AMBC zu lesen sein.

Die Einschaltung ist diesem Abschnitt angehängt, weil aus der einfachsten Construction, welche wir auf der Kugelfläche ausführen können, wenn wir dieselbe nämlich mit durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebenen durchschneiden und für diese zunächst die kleinste Zahl zwei wählen, das mit dem Flächenwinkel im innigsten Zusammenhange stehende sphärische Zweieck hervorgeht.

§. 30. Erklärung.

Eine krumme Fläche, welche von einem Punkte überall gleich weit absteht, heißt eine Kugelfläche — Mittelpunkt — Radius — Durchmesser.

Anm. Eine Kugelfläche wird von einem Halbkreise beschrieben, welchen man um seinen Durchmesser, als Axe, so lange herumdreht, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage kommmt.

§. 31. Lehrsatz.

Eine Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugelfläche geht, schneidet dieselbe in einem Kreise, welcher mit der Kugelfläche einerlei Mittelpunkt und Durchmesser hat.

Beweis. Denn da alle Punkte der Kugelfläche gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, so muß dieses auch von dem Durchschnitte gelten; folglich ist dieser ein Kreis und der Mittelpunkt der Kugelfläche sein Mittelpunkt.

§. 32. Erklärung.

Ein auf der Kugelfläche liegender Kreis, welcher mit derselben den nehmlichen Mittelpunkt hat, heißt ein Kugelkreis (im engern Sinne).

§. 33. Zusatz.

1) Jeder Kugelkreis theilt die Kugelfläche in zwei vollkommen gleiche (congruente) Hälften.

2) Die Ebenen zweier Kugelkreise durchschneiden sich in einem Durchmesser; — denn da beide Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugelfläche gehen, so muß auch ihre Durchschnittlinie durch diesen Punkt gehen.

3) Zwei Kugelkreise halbiren sich daher gegenseitig.

§. 34. Erklärung.

Ein Stück der Kugelfläche ABDCA (Fig. 25), welches von zwei halben Kugelkreisen ABD und ACD begrenzt wird, heißt ein sphärischer Winkel oder ein sphärisches Zweieck. Die dasselbe begrenzenden Halbkreise ABD und ACD werden die Schenkel und die Durchschnittspunkte derselben A und D die Scheitel des sphärischen Winkels genannt.

Zwei sphärische Winkel, welche den nehmlichen Radius haben, sind gleich, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß Scheitel und Schenkel sich decken. — Größer — Kleiner.

Ueberhaupt wird im Folgenden, wenn zwei sphärische Winkel mit einander verglichen werden, durchgehends vorausgesetzt, daß dieselben einerlei Radien haben.

Anm. Zwei Meridiane der Erdkugel schließen auf der Oberfläche derselben einen sphärischen Winkel ein.

Ein sphärischer Winkel entsteht, wenn man einen Halbkreis um seinen Durchmesser so lange dreht, bis er aus der Lage des einen Schenkels in die Lage des andern Schenkels kommt.

Während bei dem Linienwinkel der Planimetrie die Schenkel und die von denselben begrenzte Fläche sich ins Unendliche erstrecken, sind dieselben bei dem sphärischen Winkel endliche Größen.

Die Schenkel, welche bei jenem mit der Entfernung vom Scheitelpunkte immer weiter aus einander gehen, kommen bei diesem in einem zweiten Punkte zusammen.

§. 35. Erklärung.

Derjenige Flächenwinkel ABDC (Fig. 25), welcher von den Ebenen der Schenkel ABD und ACD eines sphärischen Winkels ABDCA (an der nehmlichen Seite, an welcher der sphärische Winkel liegt), eingeschlossen wird, heißt der zum sphärischen Winkel gehörige Flächenwinkel.

§. 36. Zusatz.

1) Zwei sphärische Winkel sind gleich, wenn ihre zugehörigen Flächenwinkel gleich sind.

2) Sphärische Winkel verhalten sich zu einander wie die zugehörigen Flächenwinkel.

Die Beweise sind dieselben wie die der analogen Sätze über Bogen und Centriwinkel in der Planimetrie.

Anm. So wie daher in der Planimetrie der Bogen als Maaß des zugehörigen Centriwinkels dient, ebenso kann in der Stereometrie der sphärische Winkel als Maaß des zugehörigen Flächenwinkels angesehen werden.

§. 37. Erklärung.

Zwei sphärische Winkel ABDCA und ACDEA (Fig. 25), welche die Scheitelpunkte A und D und einen Schenkel ACD gemeinschaftlich haben, und deren beide andere Schenkel ABD und AED zusammen einen ganzen Kugelkreis bilden, heißen sphärische Nebenwinkel, und zwei sphärische Winkel ABDCA und AEDGA, welche die Scheitelpunkte A und D gemeinschaftlich haben, und deren gegenüberstehende Schenkel ABD und AED — und ACD und AGD sich zu vollständigen Kugelkreisen ergänzen, heißen sphärische Scheitelwinkel.

§. 38. Zusatz.

1) Zwei sphärische Nebenwinkel machen zusammen die halbe Kugelfläche aus.

2) Sphärische Scheitelwinkel sind gleich.

§. 39. Erklärung.

Ein sphärischer Winkel, welcher einen gleichen Nebenwinkel hat, also dem vierten Theile der ganzen Kugelfläche gleich ist, heißt ein rechter, und zwei Kugelkreise heißen auf einander senkrecht, wenn sie rechte Winkel bilden. — Spitz — Stumpf — Schief.

§. 40. Zusatz.

Ein sphärischer Winkel ist ein rechter, spitzer oder stumpfer, wenn der zugehörige Flächenwinkel ein rechter, spitzer oder stumpfer ist.

§. 41. Erklärung.

Das Stück der Kugelfläche ABC (Fig. 25), welches von den Bogen dreier Kugelkreise eingeschlossen wird, heißt ein sphärisches Dreieck. Diese Bogen werden die Seiten und die sphärischen Winkel, welche von den halben Kugelkreisen, von denen die Seiten des sphärischen Dreiecks Theile sind, eingeschlossen werden, die Winkel des sphärischen Dreiecks genannt.

Es wird hiernach nicht noch der besonderen Erklärung, was man unter einem sphärischen Vierecke, Fünfecke, überhaupt unter einem sphärischen Vielecke zu verstehen hat, bedürfen.

Dritter Abschnitt.

Von dem körperlichen Dreiecke.

A. Im Allgemeinen.

§. 42. Erklärung.

Der nach einer Seite hin unbegrenzte Raum MABC (Fig. 15), welcher von drei (oder mehr) sich schneidenden Ebenen eingeschlossen wird, deren Durchschnittslinien sämmtlich in dem nehmlichen Punkte M (der Spitze) zusammenstoßen, wird ein körperliches Dreieck oder Vieleck genannt. Die von den Kanten AM, BM und CM eingeschlossenen Linienwinkel werden die Seiten und die von den Ebenen derselben (auf der Seite, auf welcher das Vieleck liegt,) eingeschlossenen Flächenwinkel werden die Winkel des körperlichen Dreiecks (oder Vielecks) genannt.

Der Kürze wegen werden wir in Folgendem den an der Kante MB liegenden Flächenwinkel AMBC auch durch Flächenwinkel (MB) bezeichnen und ebenso die andern.

Uebrigens werden im Folgenden nur solche körperliche Dreiecke (oder Vielecke), deren Seiten und Winkel sämmtlich hohl sind, in Betracht gezogen werden.

Anm. Durch diese Beschränkung wird der Allgemeinheit wenig Eintrag gethan, da es sehr leicht ist, wenn irgendwo (z. B. in der Astronomie) ein Vieleck mit erhabenen Seiten und Winkeln in Betracht gezogen werden sollte, die Untersuchung auf ein Vieleck mit nur hohlen Seiten oder Winkeln zurückzuführen.

§. 43. Zusatz.

Wenn man um die Spitze M (Fig. 15), eines körperlichen Dreiecks (oder Vielecks) MABC mit einem beliebigen Radius eine Kugelfläche construirt, so durchschneiden die Seiten des körperlichen Dreiecks (oder Vielecks) die Kugelfläche in Kreisbogen, welche auf der Kugelfläche ein sphärisches Dreieck (oder Vieleck) ABC einschließen. Die Seiten des körperlichen Dreiecks (oder Vielecks) MABC, d. h. die dasselbe begrenzenden Linienwinkel sind die zu den Kreisbogen, welche die Seiten des sphärischen Dreiecks (oder Vielecks) ABC

bilden, gehörige Centriwinkel und die Winkel des körperlichen Dreiecks (des Vielecks) sind die zu den sphärischen Winkeln des sphärischen Dreiecks (oder Vielecks) zugehörigen Flächenwinkel.

So ist z. B. der Linienwinkel AMC der Centriwinkel des Bogens AC und der Flächenwinkel AMCB der zu dem sphärischen Winkel ACB gehörige Flächenwinkel.

Eben so erhält man, wenn man sich das sphärische Dreieck ABC als gegeben denkt, das zugehörige körperliche Dreieck MABC, wenn man durch die Ecken A, B und C des sphärischen Dreiecks Linien nach dem Mittelpunkte M zieht und durch je zwei dieser Linien Ebenen legt.

Da in den in der angezeigten Art zusammengehörigen körperlichen und sphärischen Dreiecken (oder Vielecken) die Seiten und Winkel des einen mit den Seiten und Winkeln des andern in der Zahl der Grade übereinstimmen, so müssen offenbar auch die von den Seiten und Winkeln des einen geltenden Sätze eben so für die Seiten und Winkel des andern richtig sein.

§. 44. Lehrsatz.

In jedem sphärischen (oder körperlichen) Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte.

Beweis. Um zu zeigen, daß in dem sphärischen Dreiecke ABC (Fig. 16) $AB + BC > AC$ ist, trage man auf die Verlängerung der Seite AB die Seite $BC = BD$ auf, verbinde A, B, C und D mit dem Mittelpunkte M durch gerade Linien und ziehe endlich noch die Linien AC, AD und CE. Dann ist das Liniendreieck CME congruent DME ($ME = ME$, $MC = MD$, W. $BMC = BMD$), folglich auch $CE = DE$. Weiter ist in dem Liniendreiecke ACE nach der Planimetrie $AE + EC > AC$, daher Sehne $AD > AC$, also auch Boden $AD > AC$, d. h. $AB + BC > AC$, w. z. b. w.

Anm. Dieser Beweis würde seine Brauchbarkeit verlieren, wenn die Summe der Seiten AB und BC eben so groß oder größer, als ein Halbkreis ausfallen sollte; es würde aber für diesen Fall vermöge §. 41. eines Beweises überhaupt nicht bedürfen.

§. 45. Lehrsatz.

In jedem sphärischen (oder körperlichen) Dreiecke ABC (Fig. 17), ist die Summe aller Seiten kleiner als 360^0.

Beweis. Man erweitere zwei Seiten AB und AC, bis sie sich zum zweiten Male in dem Punkte D schneiden; dann ist in dem entstandenen Dreiecke BCD $BC < BD + CD$;
folglich wenn wir beiderseits $AB + AC$ addiren:

$$AB + AC + BC < AB + AC + BD + CD.$$

Nun ist aber $AB + BD$ gleich einem Halbkreise und eben so $AC + CD$ gleich einem Halbkreise; also ist die Summe $AB + AC + BC$ kleiner, als ein ganzer Kreis.

§. 46. Zusatz.

In jedem sphärischen (oder körperlichen) Vielecke ist die Summe aller Seiten kleiner als 360^0.

Beweis. Es sei zunächst ein Viereck ABCD (Fig. 18), gegeben; man verlängere zwei Seiten AD und BC, welche durch eine zwischenliegende ge=

trennt sind, bis sie sich im Punkte E durchschneiden. Dann ist dem entstandenen Dreiecke CDE $CD < CE + DE$,
folglich auch, wenn wir beiderseits $AD + AB + BC$ addiren:

$$AD + AB + BC + CD < AD + AB + BC + CE + DE.$$

Da $AD + DE = AE$ und $BC + CE = BE$ ist, so folgt hieraus:

$$AD + AB + BC + CD < AE + AB + BE,$$

d. h. die Summe der Seiten des Vierecks ABCD ist kleiner, als die Summe der Seiten des Dreiecks ABE, und da diese bereits im vorherg. §. kleiner, als 360^0 erwiesen ist, so muß um so mehr die Summe der Seiten des Vierecks ABCD kleiner, als 360^0 sein.

In ähnlicher Art läßt sich dasselbe von einem sphärischen Fünfecke, Sechsecke u. s. w. erweisen.

Bemerkung. Die vorhergehenden Sätze betrafen lediglich die Seiten des körperlichen Dreiecks (oder Vielecks); ehe wir zur Betrachtung der Winkel übergehn, schicken wir noch die folgenden Sätze (§. 47—49) voraus, welche uns eine höchst merkwürdige Eigenthümlichkeit stereometrischer Constructionen vorführt, zu welcher wir in der Planimetrie kein Analogon finden.

§. 47. Erklärung.

Zwei körperliche Dreiecke MABC und MA'B'C' (Fig. 19), in denen die Kanten des einen die über die gemeinschaftliche Spitze M fortgesetzten Verlängerungen der Kanten des andern sind, heißen Scheiteldreiecke. Dieselbe Benennung wird auch auf die zu denselben gehörigen sphärischen Dreiecke ABC und A'B'C' angewendet.

§. 48. Zusatz.

Zwei körperliche oder sphärische Scheiteldreiecke stimmen, wie leicht zu sehn, in allen Seiten und Winkeln überein; dennoch ist es nicht möglich, dieselben, (wenn sie ungleichschenklig sind,) zum Decken zu bringen, (was am deutlichsten aus der Anschauung von Modellen hervorgeht).

Anm. Wollte man z. B. die Dreiecke MABC und MA'B'C (Fig. 19), so auf einander legen, daß ein Paar gleiche Seiten AMB und A'MB' sich decken, nehmlich AM auf A'M und BM auf B'M fällt, dann würden sich wohl diese Seiten, aber nicht die Dreiecke decken, in dem das eine Dreieck MABC vor der Seite MAB, das andere Dreieck MA'B'C' hinter der Seite MA'B' liegt. Wollte man, um diesen Uebelstand zu vermeiden, das Dreieck MA'B'C' umwenden, so werden sich die gleichen Seiten MAB und MA'B' jetzt nicht anders zum Decken bringen lassen, als daß man MA' auf MB und MB' auf MA legt. Dann decken sich aber die Dreiecke MABC und MA'B'C' nicht nothwendig, da die an den Kanten MA' und MB und eben so die an den Kanten MB' und MA liegenden Flächenwinkel nicht als gleich vorausgesetzt sind. Es können daher im Allgemeinen Scheiteldreiecke nicht zum Decken gebracht werden.

§. 49. Erklärung.

Körperliche oder sphärische Dreiecke (oder Vielecke), welche in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, ohne congruent zu sein, werden symmetrisch genannt.

§. 50. Lehrsatz.

Sind in einem körperlichen oder sphärischen Dreiecke zwei Winkel gleich, so sind auch die gegenüberstehenden Seiten gleich und das Dreieck ist folglich gleichschenklig.

Beweis. Man construire zu dem körperlichen Dreiecke MABC (Fig. 20), in welchem die an den Kanten MA und MB liegenden Flächenwinkel als gleich vorausgesetzt sein sollen, das zugehörige Scheiteldreieck MA′B′C′ und lege hierauf die beiden Dreiecke MABC und MA′B′C′ so aufeinander, daß die Kante MA auf MB′ und MB auf MA′ zu liegen kommt; dann fällt auch die Ebene MAC auf MB′C′, weil nach der Voraussetzung Flächenwinkel (MA) = (MB) = (MB′) ist, und Ebene MBC fällt auf MA′C′, weil Flächenwinkel (MB) = (MA) = (MA′) ist. Da nun die Ebenen MAC und MBC mit den Ebenen MB′C′ und MA′C′ zusammen gefallen sind, so muß auch die gemeinschaftliche Kante der ersteren, MC, auf die gemeinschaftliche Kante der letztern, MC′, fallen. Demnach ist Linienwinkel AMC = B′MC′ = BMC, w. z. b. w.

§. 51. Lehrsatz.

In jedem sphärischen (oder körperlichen) Dreiecke liegt einem größeren Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Beweis. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 21), W. B > C; um zu zeigen, daß auch die Seite AC > AB ist, denke man sich von dem größern Winkel B den kleinern C abgeschnitten, gleich CBD; dann ist nach dem vorherg. §. das Dreieck BCD gleichschenklig und BD = CD. Ferner ist in dem Dreiecke ABD nach §. 44 AB < AD + BD, folglich auch AB < AD + CD, d. h. AB < AC.

§. 52. Zusatz.

Aus den beiden vorhergehenden Paragraphen ergiebt sich leicht indirekt:

1) Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

2) Im ungleichschenkligen Dreiecke liegt der größeren Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.

Bemerkung. Die vorstehende Behandlung der Sätze über das gleichschenklige und ungleichschenklige Dreieck in der Stereometrie mußte von der Behandlung der gleichlautenden Sätze in der Planimetrie darum abweichen, weil hier das Beweismittel, daß die drei Winkel eines Dreiecks einen Flachen betragen, ausfällt, indem im sphärischen und körperlichen Dreiecke, wie die beiden folgenden Sätze zeigen, diese Summe vielmehr immer größer, als ein Flacher ist.

Anm. Uebrigens hätte sich allerdings auch bei den vorstehenden Sätzen die nehmliche Anordnung, wenn auch nicht analoge Beweisführung wie in der Planimetrie befolgen lassen, wie in dem Programm des Gymnasiums zu Soest vom Jahre 1853, S. 7 gezeigt ist.

*§. 53. Lehrsatz.

In jedem sphärischen oder körperliche Dreiecke (ABC, Fig. 22) ist, wenn man eine Seite (BC) verlängert, der entstandene Außenwinkel (δ) kleiner als die beiden innern gegenüberstehenden (α und β) zusammen.

Beweis. Wenn die beiden Winkel α und β zusammen einen Flachen oder mehr als einen Flachen betragen sollten, so würde die Richtigkeit der Behauptung ($\delta < \alpha + \beta$) an sich klar sein. Wir werden daher den Beweis nur für den Fall zu führen brauchen, daß α und β zusammen weniger, als einen Flachen ausmachen. Dieß vorausgesetzt, lege man den Winkel $\alpha = \varepsilon$ im Punkte B an AB und erweitere die Seiten des gegebenen Dreiecks ABC, bis sie sich zum zweiten Male in B′ und C′ schneiden. Dann ist in dem

Dreiecke $AB'E$ W. $\alpha' = \alpha = \varepsilon = \varepsilon'$, folglich $B'E = AE$ und daher $B'E < CE$. Demnach ist in dem Dreiecke $B'CE$ auch W. $\delta < \beta' + \varepsilon'$, oder da $\beta' = \beta$ und $\varepsilon' = \varepsilon = \alpha$ ist, $\delta < \alpha + \beta$, w. z. b. w.

*§. 54. Lehrsatz.

In jedem sphärischen oder körperlichen Dreiecke (ABC, Fig. 22) betragen alle Winkel zusammen mehr, als einen Flachen.

Beweis. Denn da $\delta + \gamma = \pi$, aber nach dem vorhergehenden §. $\alpha + \beta > \delta$ ist, so ist folglich $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

Bemerkung. Wir wenden uns nun zu den Sätzen über die Congruenz der körperlichen Dreiecke und treffen hier in den §§. 55, 57 und 59 dieselben vier Congruenzfälle, wie in der Planimetrie, zugleich mit ganz übereinstimmenden Beweisen an. Außerdem aber begegnen wir noch in den §§. 58 und 60 zwei anderen Congruenzfällen, welche in der Planimetrie fehlen, weil in dem Liniendreiecke der Planimetrie durch zwei Winkel auch der dritte bestimmt wird, während die drei Winkel eines körperlichen Dreiecks von einander unabhängig sind.

Eine andere Verschiedenheit zwischen der Stereometrie und der Planimetrie besteht noch in dem Umstande, daß zwei in allen Stücken übereinstimmende körperliche oder sphärische Dreiecke entweder congruent oder symmetrisch sind, wo dann im letztern Falle das eine dem Scheiteldreiecke des andern congruent ist.

§. 55. Lehrsatz. (Erster und zweiter Congruenzfall.)

Zwei sphärische (oder körperliche) Dreiecke sind in allen Stücken gleich, wenn in denselben

1) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel oder

2) eine Seite und die beiden anliegenden Winkel als gleich gegeben sind.

Der Beweis dieser Sätze wird eben so geführt, wie der der ähnlich lautenden Sätze in der Planimetrie, indem man die Dreiecke entweder unmittelbar oder das eine mit dem Scheiteldreiecke des andern zusammenlegt.

§. 56. Lehrsatz.

Sind in zwei sphärischen (oder körperlichen) Dreiecken je zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größeren Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Beweis. Auch dieser Satz wird eben so wie der ähnlich lautende Satz in der Planimetrie erwiesen, indem wie leicht zu sehn, vermöge §. 44 die beiden folgenden Sätze auch von sphärischen Dreiecken gelten:

Wenn zwei Dreiecke eine gemeinschaftliche Grundlinie haben und

1) ein Paar Seiten sich durchschneiden, so ist die Summe der sich schneidenden Seiten größer, als die Summe der sich nicht schneidenden Seiten, und wenn

2) die Seiten des einen Dreiecks die Seiten des andern einschließen, so ist die Summe der einschließenden Seiten größer, als die Summe der eingeschlossenen Seiten.

§. 57. Lehrsatz. (Dritter Congruenzfall.)

Zwei sphärische (oder körperliche) Dreiecke stimmen auch in den Winkeln überein, wenn ihre Seiten als gleich vorausgesetzt sind.

Der Beweis ist derselbe wie der des ähnlich lautenden Satzes in der Planimetrie.

***§. 58. Lehrsatz.** (Vierter Congruenzfall.)

Wenn zwei Dreiecke in den drei Winkeln übereinstimmen, so sind auch ihre gleichliegenden Seiten einander gleich*).

Beweis. Es sei in den Dreiecken ABC und A′B′C′ Fig. 23, W. A = A′, B = B′ und C = C′. Man verlängere zwei Seiten des Dreiecks ABC, bis sie sich zum zweiten Male im Punkte A″ durchschneiden, mache A″B″ = A′B′, A″C″ = A′C′ und lege durch die Punkte B″ und C″ den Bogen eines Hauptkreises, welcher die verlängerte Seite BC in D durchschneidet. Dann stimmen zunächst die Dreiecke A′B′C′ und A″B″C″ in zwei Seiten (A′B′ = A″B″, A′C′ = A″C″ und dem eingeschlossenen Winkel A′ = A″) überein, und es ist folglich auch W. A″B″C″ = A′B′C′ = ABC und Winkel A″C″B″ = A′C′B′ = ACB. Hieraus folgt weiter W. DB″B = DBB″ und W. DC″C = DCC″. Es sind daher nach §. 50 die Dreiecke BB″D und CC″D gleichschenklig; also Seite BD = B″D und C″D = CD, folglich auch BC = B″C″ = B′C′. Nun stimmen die Dreiecke ABC und A′B′C′ in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln überein; es müssen daher auch nach §. 55, 2 die übrigen Seiten in beiden gleich groß sein.

***§. 59. Lehrsatz.** (Fünfter Congruenzfall.)

Wenn zwei Dreiecke ABC und A′B′C′, Fig. 24, in zwei Seiten, AC = A′C′, BC = B′C′ und dem der einen gegenüberliegenden Winkel A = A′ übereinstimmen, so sind entweder auch alle andern gleichliegenden Stücke in beiden gleich groß, oder der Winkel B′ in dem einen ist gleich dem Nebenwinkel von B in dem andern.

Beweis. Wenn die Seite AB = A′B′ ist, so folgt die Richtigkeit des Satzes aus §. 55. Wenn aber diese Seiten ungleich sind, z. B. A′B′ > AB ist, so mache man AB″ = A′B′ und verbinde B″ mit C; dann stimmen die Dreiecke AB″C und A′B′C′ in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, und folglich ist auch Seite B″C = B′C′ = BC, daher W. CBB″ = CB″B = C′B′A′, w. z. b. w.

***§. 60. Lehrsatz.** (Sechster Congruenzfall.)

Wenn zwei Dreiecke ABC und A′B′C′ (Fig. 23 und 24,) in zwei Winkeln A = A′ und B = B′, und der dem einen gegenüberliegenden Seite BC = B′C′ übereinstimmen, so sind auch die übrigen gleichliegenden Stücke in beiden gleich groß oder die dem andern gleichen Winkel gegenüberliegenden Seiten AC und A′C′ ergänzen sich zu einem Halbkreise.

Beweis. Man verlängere in dem einen Dreiecke ABC die Seiten AB und AC, bis sie sich zum zweiten Male in A″ durchschneiden. Dann ist entweder A′C′ ungleich oder gleich A″C. Im ersten Falle mache man A′C′ = A″C″ und A′B′ = A″B″, Fig. 23, und construire weiter wie im §. 58. Nun stimmen die Dreiecke A′B′C′ und A″B″C″ in zwei Seiten, A′C′ = A″C″ und A′B′ = A″B″, und dem eingeschlossenen W. A′ = A″

*) Dieser und die übrigen mit einem Sternchen (*) bezeichneten Sätze sind für das Folgende von geringerer Wichtigkeit und können ohne Störung des Zusammenhanges auch ganz übergangen werden.

überein; daher ist auch W. $B'' = B' = B$, und folglich Seite $BD = B''D$, also auch, da $BC = B''C''$, $CD = C''D$ und W. $C = C'' = C'$. Demnach stimmen die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in einer Seite, $BC = B'C'$ und den anliegenden Winkeln, $B = B'$ und $C = C'$ überein, und es müssen folglich auch nach §. 55, 2 die übrigen gleichliegenden Stücke in beiden gleich groß sein.

Es kann aber auch die Seite $A'C' = A''C$, Fig. 24, sein, also $A'C'$ und AC sich zu einem Halbkreise ergänzen. Wenn wir dann noch $A''B'' = A'B'$ machen und B'' mit C verbinden, so ist das Dreieck $A'B'C'$ dem Dreiecke $A''B''C$, da sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, $A'C' = A''C$, $A'B' = A''B''$, $A' = A''$, übereinstimmen, in allen Stücken gleich. Aber das Dreieck $A''B''C$ ist nicht mehr nothwendig dem Dreiecke ABC in allen Stücken gleich, obschon in demselben W. $A = A''$, W. $B = B''$ und S. $BC = B''C$ ist. Nur wenn die sich zu einem Halbkreise ergänzenden Seiten AC und $A''C$ Quadranten sein sollten, so würden diese Dreiecke zufolge des vorherg. §. in allen Stücken übereinstimmen müssen.

B. Vom rechtwinkligen Dreiecke ins Besondere.

§. 61. Erklärung.

Ein sphärisches oder körperliches Dreieck wird rechtwinklig genannt, wenn in demselben ein Winkel ein rechter ist. — Hypotenuse — Catheten.

§. 62. Lehrsatz.

Wenn in einem sphärischen (oder körperlichen) Dreiecke ABC (Fig. 25) zwei Seiten AB und AC Quadranten (rechte Linienwinkel) sind, so sind auch die gegenüberliegenden Winkel B und C rechte *).

Beweis. Man verlängere die beiden Seiten AB und AC, bis sie sich zum zweiten Male im Punkte D durchschneiden. Dann stimmen die beiden Dreiecke ABC und DBC in allen drei Seiten ($BC = BC$, $AC = CD$, $AB = BD$) überein; folglich ist auch W. $ABC = DBC = 90^0$ und W. $ACB = DCB = 90^0$ **).

§. 63. Lehrsatz.

Wenn in einem sphärischen (oder körperlichen) Dreiecke ABC (Fig. 25) zwei Winkel B und C rechte sind, so sind die gegenüberliegenden Seiten AB und AC Quadranten (rechte Linienwinkel).

Beweis. Die beiden Dreiecke ABC und BCD stimmen in einer Seite ($BC = BC$) und den anliegenden Winkeln ($ABC = DBC$ und $ACB = DCB$) überein; folglich ist auch Seite $AB = BD = 90^0$ und $AC = CD = 90^0$.

§. 64. Lehrsatz.

Wenn in einem sphärischen (oder körperlichen) Dreiecke ABC (Fig. 25) ein Winkel B ein rechter und eine ihm anliegende Seite AB ein Quadrant ist, so ist auch die Seite AC ein Quadrant und der Winkel C ein rechter.

---

*) Je zwei Meridianquadranten der Erde bilden mit dem zwischen liegenden Bogen des Aequators ein solches Dreieck.

**) Wenn wir der Kürze wegen einen sphärischen Winkel, welcher ein rechter ist, mit 90^0 bezeichnen. Vergl. unten §. 89.

Beweis. Die Dreiecke ABC und BCD stimmen in zwei Seiten (BC = BC und AB = BD) und dem eingeschlossenen Winkel ABC = DBC überein; folglich ist auch AC = CD und W. ACB = DCB.

§. 65. Lehrsatz.

Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 26) beide Catheten AB und BC kleiner, als Quadranten sind, so sind die ihnen gegenüberliegenden Winkel BAC und ACB spitz, und auch die Hypotenuse AC ist kleiner, als ein Quadrant.

Beweis. Man verlängere die eine Cathete AB über A hinaus, bis BD gleich einem Quadranten wird, und verbinde D mit C durch den Bogen eines Hauptkreises. Dann ist nach §. 64 W. DCB ein rechter und Seite CD ein Quadrant. Folglich ist der Winkel ACB spitz. Auf gleiche Weise kann gezeigt werden, daß Winkel CAB spitz ist. Ferner ist in dem Dreiecke ACD W. CAD stumpf und W. ACD spitz, folglich nach §. 51 Seite AC < CD, also AC kleiner, als ein Quadrant.

§. 66. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden §. ergeben sich leicht weiter folgende Sätze:

1) Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke AEC, Fig. 26, beide Catheten AE und CE größer, als Quadranten sind, so sind die gegenüberliegenden Winkel ACE und CAE stumpf; die Hypotenuse AC aber ist kleiner, als ein Quadrant.

2) Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke CBF, Fig. 26, eine Cathete BC kleiner, die andere BF größer, als ein Quadrant ist, so ist der der erstern gegenüberliegende Winkel BFC spitz, der der andern gegenüberliegende Winkel BCF stumpf und die Hypotenuse CF größer, als ein Quadrant.

3) Es liegt daher in einem rechtwinkligen Dreiecke einer Cathete, welche kleiner, als ein Quadrant ist, allemal ein spitzer, und einer Cathete, welche größer, als ein Quadrant ist, ein stumpfer Winkel gegenüber.

Bemerkung. Die nun folgenden Sätze sind Anwendungen der zuletzt über das rechtwinklige Dreieck vorgetragenen Sätze. Wir widmen denselben jedoch wegen ihrer großen Wichtigkeit einen besondern Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Von der senkrechten Lage der Linien und Ebenen im Raume.

A. Hauptsätze.

§. 67. Erklärung.

Eine Linie (AB, Fig. 27) heißt auf einer Ebene (CED) senkrecht, wenn sie auf allen durch ihren Fußpunkt (B) in der Ebene gezogenen Linien (BD, BF, BE u. s. w.) senkrecht steht.

§. 68. Lehrsatz.

Eine Linie AB (Fig. 27) ist auf einer Ebene CED senkrecht, wenn sie auf zwei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Linien BD und BE senkrecht steht.

Beweis. Zum Beweise ziehen wir durch den Punkt B in der Ebene CED eine willkührliche Linie BF und denken uns um den Punkt B mit einem beliebigen Radius eine Kugelfläche construirt, welche die von dem Mittelpunkte B ausgehenden Linien in den Punkten A, D, F und E durchschneidet. Dann sind in dem sphärischen Dreiecke ADE nach der Voraussetzung zwei Seiten AD und AE Quadranten, folglich die denselben gegenüberliegenden Winkel nach §. 62 rechte. Demnach ist Winkel ADF ein rechter, und da die demselben anliegende Seite AD nach der Voraussetzung ein Quadrant ist, so ist auch nach §. 64 die ihm gegenüberliegende Seite AF ein Quadrant, also AB senkrecht auf BF.

Eben so läßt sich zeigen, daß AB auf jeder andern in der Ebene CED durch den Punkt B gezogenen Linie senkrecht steht, daher ist AB auf der Ebene CED selbst senkrecht.

Bemerkung. Durch Umkehrung des vorhergehenden Satzes entsteht der folgende.

§. 69. Lehrsatz.

Wenn auf einer Linie AB (Fig. 27) in dem nehmlichen Punkte drei (oder mehr) Linien BD, BF und BE senkrecht stehn, so liegen dieselben sämmtlich in einer Ebene.

Beweis. Man lege durch zwei und zwei der gegebenen Linien, z. B. durch BD und BF und durch BF und BE eine Ebene und denke sich (wie im vorherg. §.) um den Punkt B als Mittelpunkt mit einem beliebigen Radius eine Kugelfläche construirt. Dann sind in dem sphärischen Dreiecke ADF die Seiten AD und AF und in dem sphärischen Dreiecke AFE die Seiten AE und AF nach der Voraussetzung Quadranten, folglich ist nach §. 62 in dem erstern Winkel AFD und in dem letztern Winkel AFE ein rechter. Es machen daher diese beiden Winkel einen Flachen aus, und ihre Schenkel DBF und EBF bilden folglich eine Ebene. Demnach liegen die drei Linien BD, BF und BE in einer Ebene.

Bemerkung. Wenn wir in §. 68 nicht blos die Lage der vom Punkte B (Fig. 27) ausgehenden Linien, sondern auch die gegenseitige Lage der in B zusammenstoßenden Ebenen berücksichtigen, so erhalten wir weiter den folgenden Satz.

§. 70. Lehrsatz.

Wenn eine Linie AB (Fig. 28) auf einer Ebene CED senkrecht steht, so ist auch jede durch die Linie AB gelegte Ebene CAD auf der gegebenen CED senkrecht.

Beweis. Man lege durch AB noch eine zweite Ebene ABE und construire um B mit einem beliebigen Radius eine Kugelfläche; dann sind in dem sphärischen Dreiecke ADE, da nach der Voraussetzung die Linie AB auf den Linien BD und BE senkrecht steht, die Seiten AD und AE Quadranten, folglich ist Winkel ADE nach §. 62 ein rechter, also die Ebene CAD auf der Ebene CED senkrecht.

Bemerkung. Durch Umkehrung eben des erwiesenen Satzes geht ferner der folgende hervor.

§. 71. Lehrsatz.

Wenn zwei sich schneidende Ebenen ABD und ABE (Fig. 28) auf einer dritten CED senkrecht stehn, so ist auch ihre gemeinschaftliche Kante AB auf der dritten Ebene CED senkrecht.

Beweis. Denn wenn wir (wie in den vorhergehenden §§.) um den Punkt B als Mittelpunkt eine Kugelfläche construiren, so sind in dem Dreiecke ADE nach der Voraussetzung die Winkel D und E rechte, folglich die ihnen gegenüberliegenden Seiten AD und AE nach §. 63 Quadranten, also die Linie AB auf den Linien BD und BE und daher nach §. 68 auf der Ebene CED selbst senkrecht.

Bemerkung. Während in §. 70 zwei rechte Linienwinkel ABD und ABE (Fig. 27), in §. 71 zwei rechte Flächenwinkel BD und BE die Voraussetzung bilden, erhalten wir endlich noch den folgenden Satz, wenn wir einen rechten Flächenwinkel BD und einen rechten Linienwinkel ABD in der Voraussetzung mit einander verbinden.

§. 72. Lehrsatz.

Wenn zwei Ebenen CAD und CED (Fig. 28) auf einander senkrecht stehn, und man zieht in der einen CAD eine Linie AB senkrecht auf die Kante CD, so ist diese Linie AB auch auf der andern Ebene CED senkrecht.

Beweis. Wenn wir in der Ebene CED durch den Punkt B noch eine willkührliche Linie BE ziehen und uns um B eine Kugelfläche construirt denken, so ist in dem Dreiecke ADE nach der Voraussetzung die Seite AD ein Quadrant und der ihr anliegende Winkel ADE ein rechter; folglich ist nach §. 64 auch die diesem Winkel gegenüberliegende Seite AE ein Quadrant, also die Linie AB senkrecht auf BE, und da AB auch senkrecht auf BD vorausgesetzt ist, so ist sie nach §. 68 auf der Ebene CED selbst senkrecht.

B. Aufgaben.

Bemerkung. Wir wenden nun zunächst die vorhergehenden Sätze zur Auflösung einiger wichtigen und häufige Anwendung findenden stereometrischen Aufgaben an, indem wir mit den am leichtesten zu lösenden Aufgaben beginnen.

§. 73. Aufgabe.

Durch einen Punkt A (Fig. 29) auf einer Linie BC eine senkrechte Ebene zu legen.

Auflösung. Man lege durch die Linie BC zwei willkührliche Ebenen, ziehe in denselben die Linien AD und AE senkrecht auf BC und lege durch diese Linien eine Ebene DAEF, so ist BC auf dieser Ebene senkrecht, weil sie nach der Construction auf den sich schneidenden Linien AD und AE senkrecht steht.

§. 74. Zusatz.

Durch einen Punkt in einer Linie kann nur eine einzige senkrechte Ebene gelegt werden.

Beweis. Angenommen, es gingen durch den Punkt A in der Linie BC (Fig. 30) zwei Ebenen DEF und DEG, welche beide auf der Linie BC senkrecht wären, so lege man durch BC eine willkührliche Ebene, welche (nicht gerade durch die Kante DE geht und) die gegebenen Ebenen in zwei Linien

AF und AG durchschneidet; dann müßte BC, da sie nach der Annahme auf den Ebenen DEF und DEG senkrecht sein soll, auch auf den beiden Linien AF und AG senkrecht stehen, was nach der Planimetrie unmöglich ist, da alle drei Linien in einer Ebene liegen.

§. 75. Aufgabe.

Durch einen Punkt D, welcher außerhalb einer Linie BC (Fig. 29) gegeben ist, eine Ebene senkrecht auf diese Linie zu construiren.

Auflösung. Man lege zunächst durch die Linie BC und den außerhalb derselben gegebenen Punkt D eine Ebene und dann durch BC noch eine zweite willkührliche Ebene BCE, ziehe in der erstern Ebene von D aus die Linie AD senkrecht auf BC und in der letztern von A aus die Linie AE ebenfalls senkrecht auf BC und lege durch die Linien AD und AE eine Ebene DAEF, welche, wie leicht zu sehn, die verlangte ist.

§. 76. Zusatz.

1) Durch einen Punkt A (Fig. 31), welcher außerhalb einer Linie BC gegeben ist, läßt sich nur eine Ebene senkrecht zu dieser Linie construiren.

Beweis. Denn angenommen, es gingen durch den Punkt A zwei Ebenen, welche auf der Linie BC in den Punkten D und E senkrecht ständen; dann würde, wenn wir A mit D und E verbinden, ein Dreieck ADE entstehn, welches bei D und E zwei rechte Winkel hätte.

2) Zwei Ebenen MN und PQ (Fig. 32) sind daher gewiß parallel, wenn beide auf derselben Linie AB senkrecht stehn.

Beweis. Es ist nehmlich nicht möglich, daß die Ebenen MN und PQ in irgend einem Punkte X zusammenstoßen; denn dann gingen durch einen Punkt X außerhalb einer Linie zwei zu derselben senkrechten Ebenen, was gegen Nro. 1 streitet.

3) Umgekehrt folgt hieraus: Wenn von zwei parallelen Ebenen MN und PQ (Fig. 32) die eine PQ auf einer Linie AB senkrecht steht, so ist die andere MN auf dieser Linie ebenfalls senkrecht.

Beweis. Denn wenn die Ebene MN auf der Linie AB nicht senkrecht wäre, so ließe sich nach §. 73 durch den Punkt A eine andere Ebene RS senkrecht auf AB legen. Dann müßte aber diese Ebene nach Nro. 2 ebenfalls mit PQ parallel sein, und es gingen folglich durch den Punkt A zwei zu PQ parallele Ebenen MN und RS, was nach §. 19 unmöglich ist.

Bemerkung. Wir erhalten die Analysis zu der folgenden Aufgabe, durch eine Linie in einer Ebene eine senkrechte Ebene zu legen, aus der Auflösung der Aufgabe des §. 75, wenn wir in Fig. 29 BCD als die gegebene Ebene, AD als die in derselben gegebenen Linie und DAEF als die gesuchte Ebene ansehen.

§. 77. Aufgabe.

Durch eine Linie DG (Fig. 33) in einer Ebene MN eine senkrechte Ebene zu construiren.

Auflösung. Man nehme in der Linie DG einen beliebigen Punkt A an, ziehe durch denselben in der Ebene MN eine zu DG senkrechte Linie BC, lege durch diese eine zweite willkührliche Ebene BEC, ziehe in dieser Ebene durch den Punkt A eine auf BC senkrechte Linie AE und lege endlich durch die Linien DG und AE eine Ebene DEG, so ist diese Ebene senkrecht auf MN.

Beweis. Nach der Construction ist die Linie BC senkrecht auf den Linien AD und AE, folglich auch senkrecht auf der Ebene DEG; daher ist auch die durch die Linie BC gehende Ebene MN nach §. 70 senkrecht auf der Ebene DEG, w. z. b. w.

Anm. Daß sich durch eine Linie in einer Ebene nur eine einzige senkrechte Ebene legen läßt, ist an sich klar, da alle rechten Flächenwinkel einander gleich sind.

Bemerkung. Ehe wir zu der Aufgabe übergehen können, durch eine außerhalb einer Ebene gegebene Linie eine senkrechte Ebene zu legen, müssen wir noch die beiden Aufgaben, auf einer Ebene ein Loth zu errichten und auf eine Ebene ein Loth zu fällen, vorausschicken. Die Auflösung der ersteren Aufgabe wird vermöge §. 72 sehr leicht mit Hilfe der soeben gelösten Aufgabe erhalten, und aus der ersteren Aufgabe ergiebt sich dann weiter mit Benutzung von §. 80 die Auflösung der letzteren.

§. 78. Aufgabe.

Auf einer Ebene MN (Fig. 35) in einem gegebenen Punkt B ein Loth aufzurichten.

Auflösung. Man ziehe durch den Punkt B in der Ebene MN eine willkührliche Linie GH und lege durch diese nach §. 77 eine senkrechte Ebene GAH. Zieht man dann in dieser durch den Punkt B senkrecht auf die Kante GH eine Linie AB, so ist diese Linie auch auf der Ebene MN senkrecht, weil sie in einer senkrechten Ebene senkrecht zur Kante gezogen ist.

§. 79. Zusatz.

In einem Punkte einer Ebene kann nur ein Loth errichtet werden.

Beweis. Angenommen, es ließen sich im Punkte A auf der Ebene MN (Fig. 34) zwei Lothe AB und AC errichten, so lege man durch dieselben eine Ebene, welche die gegebene Ebene in DE durchschneidet; dann müßten AB und AC, weil sie beide auf der Ebene MN senkrecht stehen sollen, auch auf der Linie DE senkrecht stehen, was nach der Planimetrie, da alle drei Linien in der nehmlichen Ebene liegen, unmöglich ist.

Bemerkung. Wenn man in zwei verschiedenen Punkten einer Ebene Lothe errichtet, so leuchtet zwar sofort ein, daß dieselben sich nicht schneiden können. Es folgt aber hieraus noch nicht, daß dieselben parallel sind, da für diesen Zweck noch erforderlich ist, daß sie in einer Ebene liegen. Daß dieß wirklich stattfindet, lehrt der folgende Paragraph, in welchem die Behauptung (1) der Behauptung (2) vorangeschickt ist, um für diese eine leichtere Beweisführung zu gewinnen.

§. 80. Lehrsatz.

1) Wenn von zwei parallelen Linien die eine auf einer Ebene senkrecht steht, so ist die andere auf dieser Ebene ebenfalls senkrecht.

2) Zwei Linien, welche auf einer Ebene senkrecht stehen, sind parallel.

Beweis. 1) Wenn $AB \parallel CD$ und $AB \perp MN$ (Fig. 35) ist, so muß auch $CD \perp MN$ sein. Um dieses zu zeigen, ziehe man durch D in MN eine willkührliche Linie DE und durch B mit derselben eine Parallele BF; dann ist Winkel $CDE = ABF$, weil ihre Schenkel parallel laufen, und da Winkel ABF nach der Voraussetzung $= 90^0$ ist, so ist folglich auch Winkel $CDE = 90^0$,

also CD $\perp$ DE. — Dasselbe kann eben so von jeder anderen durch den Punkt D in der Ebene MN gezogenen Linie erwiesen werden; folglich ist CD ein Loth auf MN.

2) Wenn AB und CD beide $\perp$ MN vorausgesetzt sind, so müssen sie auch parallel sein. Denn angenommen dieses wäre nicht der Fall, so ließe sich doch durch den Punkt D eine andere Linie parallel mit AB ziehen. Diese müßte dann nach Nro. 1 auf der Ebene MN ebenfalls senkrecht stehen, was nach §. 79 unmöglich ist, da CD $\perp$ MN vorausgesetzt ist. Demnach müssen die Linien AB und CD parallel sein.

§. 81. Aufgabe.

Auf eine Ebene MN (Fig. 35) aus einem außerhalb gegebenen Punkte A ein Loth zu fällen.

Auflösung. In einem beliebigen Punkte D der Ebene MN errichte man auf derselben nach §. 78 das Loth CD und ziehe mit diesem durch den Punkt A die Parallele AB, welche nach §. 80 auf der Ebene MN senkrecht ist.

§. 82. Zusatz.

1) Aus einem Punkte außerhalb einer Ebene läßt sich auf dieselbe nur ein Loth fällen.

Beweis. Angenommen, es ließen sich aus dem Punkte A (Fig. 36) auf die Ebene MN die beiden Lothe AB und AC fällen, so würde, wenn wir durch diese beiden Linien eine Ebene legen, welche die gegebene Ebene in BC durchschneidet, ein Dreieck ABC mit zwei rechten Winkeln B und C entstehen, was nach der Planimetrie unmöglich ist.

2) Gehen aus einem Punkte außerhalb einer Ebene mehrere Linien nach derselben, so ist das Loth unter allen am kleinsten und heißt daher der Abstand des Punktes von der Ebene, und die Linien werden um so größer, je weiter sie ihre Fußpunkte von dem Fußpunkte des Lothes entfernen.

Der Beweis ist derselbe wie der des ähnlich lautenden Satzes (§. 83) der Planimetrie.

3) Da Linien, welche auf einer Ebene senkrecht stehen, einander parallel und nach §. 20, 3 parallele Linien zwischen parallelen Ebenen gleich sind, so folgt hieraus, daß auch Lothe zwischen parallelen Ebenen gleich sind. Man sagt daher: parallele Ebenen stehen überall gleich weit von einander ab.

4) Wenn mehrere Punkte von einer Ebene an derselben Seite gleichen Abstand haben, so liegen dieselben alle in einer Ebene, welche mit der gegebenen Ebene parallel ist.

Der Beweis ist derselbe wie von dem ähnlich lautenden Satze (§. 110, 3) der Planimetrie.

Anm. Auch dieß ist leicht zu zeigen, daß alle Punkte einer Linie, welche einer Ebene parallel ist, von der Ebene gleichen Abstand haben, und daß eine Linie einer Ebene parallel ist, wenn zwei Punkte derselben von der Ebene gleichen Abstand haben.

§. 83. Aufgabe.

Durch eine Linie AB (Fig. 37), welche eine Ebene MN schneidet oder derselben parallel ist, eine senkrechte Ebene zu legen.

Auflösung. Aus einem beliebigen Punkte E der Linie AB fälle man auf die Ebene MN das Loth EF und lege durch dasselbe und die gegebene Linie eine Ebene ABCD, so ist diese auf der gegebenen Ebene MN senkrecht, weil sie durch das Loth EF gelegt ist.

§. 84. Zusatz.

Durch eine Linie AB (Fig. 37), welche einer Ebene MN parallel ist oder dieselbe schneidet, aber nicht auf derselben senkrecht steht, läßt sich nur eine einzige senkrechte Ebene legen.

Beweis. Angenommen es ließen sich durch AB zwei Ebenen ABCD und ABGH senkrecht zu MN legen. Nehmen wir jetzt in AB einen beliebigen Punkt E an und ziehen in der Ebene ABCD die Linie EF senkrecht auf die Kante CD und in der Ebene ABGH die Linie EK senkrecht auf die Kante GH, so müßten die Linien EF und EK, weil sie in senkrechten Ebenen senkrecht auf die Kante gezogen wären, auch auf der Ebene MN senkrecht stehn, was gegen §. 82 streitet.

Anm. Wenn dagegen die Linie AB auf der Ebene MN senkrecht ist, so lassen sich durch AB unzählige auf MM senkrechte Ebenen legen, indem dann nach §. 70 jede durch AB gelegte Ebene auf MN senkrecht ist.

*§. 85. Aufgabe.

Den kürzesten Abstand zweier sich kreuzenden Linien AB und CD (Fig. 38) zu finden.

Auflösung. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt C der Linie CD zu AB eine Parallele CE und lege durch CD und CE eine Ebene. Hierauf construire man nach dem vorherg. §. durch AB eine Ebene, welche auf der Ebene DCE senkrecht steht und dieselbe in der Linie FG durchschneidet. Zieht man nun noch durch den Punkt H, in welchem die Linie FG die gegebene Linie CD schneidet, eine Linie HK senkrecht auf AB, so ist diese Linie HK der kürzeste Abstand der sich kreuzenden Linien AB und CD.

Beweis. Da die Linie AB mit CE nach der Construction parallel ist, so ist sie nach §. 8 auch der Ebene DCE und folglich nach §. 9 auch der Durchschnittslinie FG parallel. Die Linie HK, welche senkrecht auf AB gezogen ist, ist daher auch senkrecht auf der Kante auf FG und folglich auch, da die Ebene ABFG auf der Ebene DCE senkrecht construirt ist, ein Loth auf dieser Ebene. Das Loth HK ist daher der kürzeste Abstand der Linie AB von der Ebene DCE und folglich auch der kürzeste Abstand der Linie AB von der Linie CD, welche ganz in dieser Ebene liegt.

B. Von dem zum Flächenwinkel gehörigen Linienwinkel.

Bemerkung. Die am Anfange dieses Abschnittes aufgeführten Hauptlehrsätze, welche uns die Mittel zur Auflösung einer Reihe wichtiger Aufgaben dargeboten haben, finden eine weitere nützliche Anwendung, indem sie uns in den Stand setzen, die Ausmessung des Flächenwinkels auf die des Linienwinkels zurückzuführen.

Wie wir oben gesehen haben, entsteht ein Flächenwinkel, wenn man den einen Schenkel so lange um die Kante dreht, bis er in die Lage des andern Schenkels kommt. Ein willkührlich in dem erstern angenommenen Punkt beschreibt bei der Umdrehung einen Kreisbogen, welcher eine aus diesem Punkte

auf die Kante senkrecht gezogene Linie zum Radius hat. Diese Senkrechte selbst aber beschreibt, (wenn wir uns dieselbe über den gegebenen Punkt hinaus ins Unendliche verlängert denken,) den zu dem Bogen gehörigen Centriwinkel. Der Flächenwinkel, der Bogen und der zuletzt erwähnte Linienwinkel nehmen, wie leicht zu sehen, bei der Drehung in gleichem Verhältnisse zu. Dieser Zusammenhang zwischen dem Flächenwinkel und dem angeführten Linienwinkel führt zu der folgenden Begriffsbestimmung.

§. 86. Erklärung.

Wenn man in den Schenkeln eines Flächenwinkels ADEC (Fig. 39) in dem nehmlichen Punkte B der Kante DE zwei zu dieser senkrechte Linien AB und BC zieht, so schließen diese an der nehmlichen Seite, an welcher der Flächenwinkel liegt *), einen Linienwinkel ABC ein, welcher der zu dem Flächenwinkel ADEC gehörige Linienwinkel oder auch der Neigungswinkel der einen Ebene ADE gegen die andere CDE genannt wird.

§. 87. Zusatz.

1) Da Winkel mit parallelen Schenkeln gleich sind, so ist es einerlei, von welchem Punkte der Kante aus die zu derselben senkrechten Linien in den Schenkeln des Flächenwinkels gezogen werden. Der von diesen Linien eingeschlossene Linienwinkel erhält allemal die nehmliche Größe.

2) Die Kante DE des Flächenwinkels ADEC (Fig. 39) ist nach §. 68 auf der Ebene des Linienwinkels ABC senkrecht, da sie nach der Voraussetzung auf den sich schneidenden Linien AB und BC senkrecht steht, und umgekehrt

3) jede zur Kante senkrechte Ebene ist die Ebene des Linienwinkels.

§. 88. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Flächenwinkel ADCE und FKLH (Fig. 39), einander gleich sind, so sind auch ihre Linienwinkel ABC und FGH gleich.

Beweis. Die körperlichen Dreiecke BAEC und GFLH stimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($ABE = FGL = 90^0$, $CBE = HGL = 90^0$ und Flächenwinkel $ABEC = FGLH$ nach der Voraussetzung) überein; folglich ist auch die dritte Seite $ABC = FGH$.

2) Zwei Flächenwinkel ADEC und FKLH sind gleich, wenn ihre Linienwinkel ABC und FGH als gleich vorausgesetzt sind.

Beweis. Die körperlichen Dreiecke BAEC und GFLH stimmen in allen drei Seiten überein, ($ABE = FGL = 90^0$, $CBE = HGL = 90^0$ und $ABC = FGH$ vorausgesetzt), folglich ist auch Flächenwinkel $ABEC = FGLH$.

3) Flächenwinkel verhalten sich zu einander wie die zugehörigen Linienwinkel.

Beweis. Man bestimme zuerst das Verhältniß der Linienwinkel; — angenommen es verhalte sich (Fig. 40) Linienwinkel $ABC : FGH = 3 : 2$, so gibt es einen dritten Winkel, welcher in ABC dreimal und in FGH zweimal enthalten ist. Diesen Winkel trage man auf ABC dreimal und auf FGH

*) Die Linien AB und AC schließen eben so wohl einen hohlen, als auch einen erhabenen Linienwinkel, und die Ebenen ADE und CDE schließen einen hohlen und einen erhabenen Flächenwinkel ein. Von diesen Linien- und Flächenwinkeln gehört der hohle Linienwinkel zum hohlen Flächenwinkel und der erhabene Linienwinkel zum erhabenen Flächenwinkel.

zweimal auf und lege durch die Kanten und durch die Theilungslinien Ebenen, so theilen diese den Flächenwinkel ADEC in drei und FKLH in zwei gleiche Theile; und es verhält sich folglich Flächenwinkel ADEC . FKLH = 3 : 2. Da nun auch nach der Annahme Linienwinkel ABC : FGH = 3 : 2 war, so verhalten sich folglich die Flächenwinkel gerade wie die zugehörigen Linienwinkel.

Anm. Will man dem vorstehenden Beweise dadurch das Ansehen größerer Allgemeinheit geben, daß man statt der bestimmten Zahlen 3 und 2 unbestimmte Zeichen m und n setzt, so wird man doch im Uebrigen den obigen Beweis buchstäblich beibehalten können. — Außerdem wird man auch noch bald die Uebereinstimmung des obigen Beweises mit den Beweisen der §§. 181, 205 und 222 in der Planimetrie bemerkt haben und eben so ohne Schwierigkeit im Stande sein, das in der Anmerkung zu §. 181 über die Vergleichung irrationaler Verhältnisse Gesagte auf den vorliegenden Fall zu übertragen.

§. 89. Zusatz.

Da sich nach §. 36 sphärische Winkel wie die zugehörigen Flächenwinkel und nach dem vorherg. §. diese wie die zugehörigen Linienwinkel verhalten, so verhalten sich folglich auch die sphärischen Winkel wie die Linienwinkel.

§. 90. Zusatz.

1) Zu einem rechten Flächenwinkel gehört auch ein rechter Linienwinkel.

Beweis. Denn wenn der Flächenwinkel Ecdb (Fig. 44) ein rechter, also seinem Nebenflächenwinkel Ecda gleich ist, so muß zu Folge §. 87, 1 auch der Linienwinkel Eeb dem Linienwinkel Eea gleich und folglich ein rechter sein.

2) Da ferner zu einem rechten sphärischen Winkel nach §. 40 auch ein rechter Flächenwinkel gehört, so hat auch der rechte sphärische Winkel allemal einen rechten Linienwinkel.

3) Nennt man den 90sten Theil eines rechten sphärischen oder Flächenwinkels einen Grad, den 60sten Theil eine Minute u. s. w., so hat der sphärische oder der Flächenwinkel allemal eben so viel Grade, Minuten u. s. w. als der zugehörige Linienwinkel.

Anm. Es folgt aber hieraus, daß in der Rechnung, in welcher niemals die Größen selbst, sondern nur ihre Maaßzahlen in Anwendung kommen, sich die sphärischen Winkel und die Flächenwinkel mit ihren Linienwinkeln vertauschen lassen.

§. 91. Zusatz.

Wenn in einem sphärischen Dreiecke ABC (Fig. 25) zwei Seiten AB und AC Quadranten sind, so hat die dritte Seite BC mit dem ihr gegenüberliegenden sphärischen Winkel BAC gleich viel Grade.

Beweis. Denn wenn wir den Mittelpunkt der Kugelfläche M mit A, B und C verbinden, so ist nach der Voraussetzung Linienwinkel AMB = AMC = 90^0, folglich ist der zum Bogen BC gehörige Centriwinkel BMC zugleich der zum sphärischen Winkel BAC gehörige Linienwinkel, und es hat daher der sphärische Winkel BAC eben so viel Grade als der Bogen BC.

*§. 92. Lehrsatz.

1) Der zu einem Flächenwinkel ABCD (Fig. 41) gehörige Linienwinkel wird auch richtig erhalten, wenn man aus einem beliebigen Punkte A in dem

einen Schenkel ein Loth AD auf den andern Schenkel und aus demselben Punkte A ein Loth AE auf die Kante BC zieht und durch beide Lothe eine Ebene legt; der so entstandene Linienwinkel AED ist der zum Flächenwinkel ABCD gehörige Linienwinkel.

Beweis. Denn wenn man in der erweiterten Ebene AED die Linie EF || AD zieht, so ist EF senkrecht auf der Ebene BCD, weil AD senkrecht auf dieser Ebene construirt ist. Demnach ist Winkel FEC $= 90^0$. Ferner ist auch Winkel AEC $= 90^0$ nach der Construction; folglich ist die Linie CE $\perp$ EF und EA und also auch senkrecht auf der Ebene FED. Daher ist die Ebene FED die Ebene des Linienwinkels, weil sie senkrecht auf der Kante BC steht.

2) Der zum Flächenwinkel ABCD gehörige Linienwinkel wird ferner richtig erhalten, wenn man aus einem Punkte A in dem einen Schenkel ein Loth AD auf den andern Schenkel und aus dem Fußpunkte D ein Loth DE auf die Kante BC zieht und durch diese beiden Lothe eine Ebene legt. Der so entstandene Linienwinkel AED ist der zum Flächenwinkel ABCD gehörige Linienwinkel.

Beweis. Denn wenn man wieder EF || AD zieht, so ist, aus gleichen Gründen wie in Nro. 1, Winkel CEF $= 90^0$, und da auch Winkel CED $= 90^0$ nach der Construction ist, so ist wieder CE senkrecht auf der Ebene FED und folglich Linienwinkel AED der zum Flächenwinkel ABCD gehörige Linienwinkel.

*§. 93. Zusatz.

Wenn zwei Ebenen ABC und BCD (Fig. 41) mit einander schiefe Flächenwinkel bilden und man fällt aus einem Punkte A in der einen Ebene ein Loth AD auf die andere Ebene, so fällt dieses allemal auf die Seite des spitzen Flächenwinkels.

Beweis. Denn wenn man aus A eine Linie AE $\perp$ BC zieht und durch AD und AE eine Ebene legt, so ist nach Nro. 1 des vorhergehenden §. Linienwinkel AED der zum Flächenwinkel ABCD gehörige Linienwinkel, und da Linienwinkel AED ein spitzer ist, weil er in dem rechtwinkligen Dreiecke AED an der Hypotenuse liegt, so ist folglich auch der Flächenwinkel ABCD ein spitzer.

*§. 94. Lehrsatz.

Wenn man aus einem Punkte innerhalb eines körperlichen Dreiecks Lothe auf die drei Seiten fällt, so wird durch diese Lothe ein neues Dreieck bestimmt, dessen Seiten und Winkel die Winkel und Seiten des gegebenen Dreiecks zu 180^0 ergänzen.

Beweis. Das Dreieck sei ABCD (Fig. 42), der innerhalb angenommene Punkt E, die Lothe EF, EG, EH und das neue Dreieck also EFGH. — Da die Ebene EHDF durch die Lothe EH und EF geht, so ist sie auf den Ebenen BAD und CAD senkrecht, deshalb HDF der zum Flächenwinkel (AD) gehörige Linienwinkel, und da im Vierecke EHDF die Winkel bei F und H rechte sind, so ist Linienwinkel HEF + HDF $= 180^0$, also auch Linienwinkel HEF + Flächenwinkel (AD) $= 180^0$ *).

*) In diesen Ausdrücken hat man sich natürlich statt der Größen ihre nach Graden ausgedrückten Zahlenwerthe gesetzt zu denken.

Eben so ist:

Linienwinkel GEF + Flächenwinkel (AC) = 180°

und " GEH + " (AB) = 180°.

Ferner ist offenbar Linienwinkel CFD der zum Flächenwinkel (EF) gehörige Linienwinkel, und da im Vierecke ACFD bei C und D rechte Winkel sind, Linienwinkel CAD + CFD = 180°, folglich

auch Linienwinkel CAD + Flächenwinkel (EF) = 180°;

eben so ist " BAD + " (EH) = 180°

und " BAC + " (EG) = 180°.

Anm. Man hat um größerer Einfachheit willen die Figur so entworfen, daß der Punkt A auch innerhalb des Dreiecks EFGH fällt. Sind die Winkel des gegebenen Dreiecks alle spitz, so kann kein anderer Fall eintreten, wie man auch immer den Punkt (innerhalb des Dreiecks ABCD) wählen mag. Diese Wahl ist jedoch nicht mehr gleichgültig, wenn das gegebene Dreieck auch einen oder mehrere stumpfe Winkel enthält, indem dann der Punkt A auch außerhalb des Dreiecks EFGH oder in eine Seite desselben fallen kann. Es ist indeß doch allemal möglich, den Punkt E so anzunehmen, daß A in das Dreieck EFGH hineinfällt. Denn wenn man den Linienwinkel CAD durch irgend eine Linie AF in zwei spitze Winkel theilt und durch einen beliebigen Punkt F dieser Linie zwei Ebenen EGCF und EHDF senkrecht auf AC und AD legt, so liegt offenbar A zwischen den Schenkeln des hohlen Flächenwinkels (EF). Theilt man nun auch den Linienwinkel BAD durch irgend eine Linie AH in zwei spitze Winkel, und legt durch den Punkt H, in welchem die Linie AH die Linie HD schneidet, eine Ebene senkrecht auf AB, so liegt A zwischen den Schenkeln des hohlen Flächenwinkels (EH). Da nun der Punkt A innerhalb der beiden Flächenwinkel (EF) und (EH) liegt, so muß er offenbar innerhalb des Dreiecks EFGH liegen.

*§. 95. Erklärung.

Zwei Dreiecke, in denen die Seiten des einen die Winkel des andern und die Winkel des einen die Seiten des andern zu 180° ergänzen, heißen Ergänzungsdreiecke.

Anm. Das Ergänzungsdreieck wird auch erhalten, wenn man in der Spitze eines gegebenen Dreiecks auf den drei gegebenen Seiten desselben Lothe errichtet. Diese Constructionsweise ist einfacher, als die oben angegebene; sie läßt sich aber weniger leicht durch eine Zeichnung veranschaulichen.

Man pflegt in den Lehrbüchern der Stereometrie das Ergänzungsdreieck zu benutzen, um aus den Congruenzsätzen der §§. 57 und 59 die der §§. 58 und 60, ferner aus §. 45 die Richtigkeit des §. 54 herzuleiten. Wir haben jedoch oben gesehen, wie auch ohne dieses Auskunftsmittel die Beweise der betreffenden Sätze gewonnen werden können. Von der größten Wichtigkeit ist dagegen das Ergänzungsdreieck für die Entwicklung der Formeln der sphärischen Trigonometrie.

D. Von Projectionen.

Bemerkung. Die nun noch folgenden Sätze dieses Abschnitts enthalten Anwendungen der zu Anfang aufgeführten Hauptsätze, welche besonders für das Zeichnen körperlicher Gegenstände von Wichtigkeit sind.

§. 96. Erklärung.

Liegt ein Punkt außerhalb einer Ebene, und zieht man aus dem Punkte ein Loth auf die Ebene, so heißt der Fußpunkt des Lothes die Projection

des gegebenen Punktes auf die gegebene Ebene. Diese Ebene wird auch die Projections- oder Grundebene und das Loth die projicirende Linie genannt.

Denkt man sich sämmtliche Punkte einer beliebigen (geraden oder krummen, begrenzten oder unbegrenzten) Linie auf die Grundebene projicirt, so wird durch die Projectionen derselben (im Allgemeinen) wieder eine zusammenhängende Linie bestimmt, welche die Projection der gegebenen Linie heißt. Die ebene oder krumme Fläche, in welcher sämmtliche projicirende Linien liegen, heißt die projicirende Ebene oder Fläche *).

Projicirt man ferner alle Grenzen einer geradlinigen oder krummlinigen Figur auf die Grundebene, so schließen die Projectionen dieser Grenzen (im Allgemeinen) ebenfalls eine Figur ein, welche die Projection der gegebenen Figur genannt wird.

Die Linie, in welcher eine ebene oder krumme Fläche die Grundebene schneidet, heißt Grundschnitt.

§. 97. Zusatz.

1) Als Projection eines Punktes in der Grundebene ist dieser Punkt selbst anzusehen. — Aehnliches gilt von einer Linie oder Figur in der Grundebene.

2) Steht eine gerade Linie auf der Grundebene senkrecht, so ist ihre Projection ein Punkt, nehmlich der Durchschnittspunkt der Linie mit der Grundebene. — Ist aber die gerade Linie nicht senkrecht auf der Grundebene, so ist ihre Projection jedenfalls eine gerade Linie, und die projicirende Fläche ist eine Ebene, welche auf der Grundebene senkrecht steht.

3) Die Projection einer krummen Linie ist im Allgemeinen wieder eine krumme Linie; sie wird eine gerade Linie, wenn die gegebene krumme Linie ganz in einer auf der Grundebene senkrechten Ebene liegt.

Beweis zu (2). Die projicirenden Linien der einzelnen Punkte der Linie AB (Fig. 43) sind parallel und liegen daher sämmtlich in der durch AB und eine von ihnen gelegten Ebene. Die Projectionsfläche ist folglich eine Ebene, die nach §. 70 auf der Grundebene senkrecht steht, und die Projectionen der einzelnen Punkte liegen im Durchschnitte ab dieser Ebene mit der Grundebene, also in einer geraden Linie.

§. 98. Zusatz.

1) Laufen zwei Linien, (die nicht senkrecht auf der Grundebene stehen,) parallel, so sind auch ihre projicirenden Ebenen, und folglich auch ihre Projectionen parallel.

2) Schneiden sich zwei Linien, so treffen auch ihre Projectionen in einem Punkte zusammen, welcher die Projection des Durchschnittspunktes der gegebenen Linien ist.

Beweis. 1) Die gegebenen Parallelen seien AB und CD (Fig. 43), ihre Projectionen ab und cd. Man wähle in jeder der gegebenen Linien einen beliebigen Punkt E und F und ziehe die projicirenden Linien Ee und Ff, welche als Lothe auf der Grundebene parallel sind. Da nun aber nach der Voraussetzung auch AB und CD parallel sind, so ist folglich (nach §. 17)

---

*) Dergleichen krumme Flächen nennt man auch Cylinderflächen (im weiteren Sinne).

Ebene ABba || CDdc und daher auch die Durchschnittslinie oder Projection ab || cd (§. 16).

2) Wenn sich die gegebenen Linien AB und CD (Fig. 44) im Punkte E durchschneiden, so schneiden sich die projicirenden Ebenen in einer Linie Ee, welche als Durchschnittslinie zweier senkrechten Ebenen (nach §. 72) ein Loth auf der Grundebene ist; demnach ist der Durchschnittspunkt e der beiden Projectionen ab und cd die Projection des Durchschnittspunktes E der gegebenen Linien AB und CD.

§. 99. Erklärung.

Der Winkel, welchen eine schiefe Linie mit ihrer Projection auf eine gegebene Ebene (Grundebene) bildet, heißt der Neigungswinkel der Linie gegen die Ebene.

§. 100. Lehrsatz.

1) Der Neigungswinkel ABC (Fig. 45) ist der kleinste, welchen eine schiefe Linie AB mit Linien durch ihren Fußpunkt B in der Ebene gezogen bildet.

2) Diese Winkel ABD, ABE u. s. w. werden um so größer, je mehr die betreffenden Linien BD, BE u. s. w. von der Projection BC der schiefen Linie AB abweichen.

Beweis. 1) In dem körperlichen Dreiecke BACD ist nach der Voraussetzung der Flächenwinkel ABCD ein rechter und Seite ABC $< 90^0$, folglich ist nach §. 66 auch der der Cathete ABC gegenüberliegende Flächenwinkel ABDC $< 90^0$. Da aber in jedem körperlichen Dreiecke dem kleinern Winkel (ABDC < ABCD) auch eine kleinere Seite gegenüberliegt, so ist Linienwinkel ABC < ABD.

2) Nach §. 66 ist auch Flächenwinkel ABED ein spitzer und folglich, da Flächenwinkel ABDE ein stumpfer ist, in dem körperlichen Dreiecke BADE Seite ABE > ABD.

Anm. Auch folgende Sätze sind leicht zu erweisen:

1) Wenn durch den Fußpunkt einer schiefen Linie zwei Linien zu beiden Seiten der Projection so gezogen sind, daß sie von dieser um gleiche Winkel abweichen, so bildet auch die schiefe Linie mit denselben gleiche Winkel.

2) Eine schiefe Linie kann niemals mit drei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Linien gleiche Winkel bilden.

3) Eine Linie ist daher nothwendig auf einer Ebene senkrecht, wenn sie mit drei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Linien gleiche Winkel bildet.

§. 101. Zusatz.

1) Zwei parallele Linien AB und CD (Fig. 46) sind gegen eine schneidende Ebene gleich geneigt.

Beweis. Denn nach §. 98, 1 sind die Projectionen BE und DF parallel und daher auch nach §. 15 die Neigungswinkel ABE und CDF einander gleich.

2) Eine schiefe Linie ist gegen zwei schneidende parallele Ebenen gleich geneigt.

Beweis. Wird durch die schiefe Linie AB (Fig. 47) eine auf MN senkrechte Ebene gelegt, so muß diese Ebene auch auf der parallelen Ebene PQ (nach §. 29) senkrecht stehen; demnach sind ABD und ACE die Neigungswinkel der schiefen Linie gegen die parallelen Ebenen MN und PQ, und diese Winkel sind gleich, da (nach §. 16) BD || CE ist.

Anm. Auch folgende Sätze sind nicht schwer zu erweisen:

1) Zwei schiefe Linien sind parallel, wenn ihre Projectionen parallel laufen, und wenn sie mit diesen nach derselben Seite hin gleiche Winkel bilden.

2) Zwei Ebenen sind parallel, wenn die Projectionen einer schiefen Linie auf die beiden Ebenen parallel laufen. — (Dagegen sind zwei Ebenen nicht nothwendig parallel, wenn auch gegen beide eine schiefe Linie gleich geneigt ist.)

*§. 102. Erklärung.

Wenn eine schiefe Ebene GHBC (Fig. 41) die Grundebene schneidet, und man denkt sich die schiefe Ebene durch eine mit dem Grundschnitte BC parallele Linie GH begrenzt, so heißt der senkrechte Abstand AE der parallelen Grenzlinie vom Grundschnitte die Länge, der senkrechte Abstand AD dieser Linie (GH) von der Grundebene die Höhe und die Projection ED der Länge AE auf die Grundebene die Grundlinie oder Basis der schiefen Ebene.

*§. 103. Zusatz.

Man sieht hieraus, daß die Länge einer schiefen Ebene eine durchaus willkürliche Größe ist, indem man als solche jede beliebige in derselben auf die Kante senkrecht gezogene Linie annehmen kann. Ist aber die Länge einer gegebenen Ebene einmal festgestellt, so ist hierdurch auch ihre Höhe und Basis bestimmt. Eben so ist leicht zu sehen, daß bei derselben Ebene, wie man auch immer ihre Länge annehmen mag, doch zwischen Länge, Basis und Höhe stets dieselben Verhältnisse stattfinden. — Dasselbe gilt von zwei Ebenen, welche mit der Grundebene gleiche Winkel bilden.

Anm. Der mit der Trigonometrie bekannte Leser weiß, daß insbesondere das Verhältniß der Höhe zur Länge der Sinus und das Verhältniß der Basis zur Länge der Cosinus des spitzen Winkels genannt wird, unter welchem die schiefe Ebene die Grundebene schneidet.

*§. 104. Lehrsatz.

Wenn in einer schiefen Ebene ein Dreieck gezeichnet ist, und man projicirt dasselbe auf die Grundebene, so verhält sich der Inhalt des gegebenen Dreiecks zum Inhalt seiner Projection, wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Basis.

Beweis. 1) Es sei zuerst eine Seite AB (Fig. 48) des gegebenen Dreiecks ABC mit dem Grundschnitte DE der schiefen Ebene parallel; dann ist auch die entsprechende Seite ab der Projection abc mit DE und AB parallel*), und da ferner das Loth $Aa \parallel Bb$ ist, so ist das Viereck ABba ein Parallelogramm und daher auch $AB = ab$.

Zieht man nun aus C in der schiefen Ebene eine Linie CF senkrecht auf die Linie AB und also auch senkrecht auf die ihr parallele Kante DE und legt durch dieses Loth und das Loth Cc, welches aus demselben Punkte C auf die Grundebene gefällt ist, eine Ebene CFc, so ist diese Ebene (nach §. 91, 1) senkrecht auf der Kante ED. Demnach ist DE senkrecht auf der in der Ebene CFc liegenden Linie Fc und daher auch die mit DE parallele $ab \perp Fc$.

*) Denn wenn drei Ebenen — die Grundebene DEc, die schiefe Ebene DEC und die projicirende Ebene ABba — sich in drei Linien DE, AB und ab durchschneiden und zwei von diesen Linien AB und DE (nach der Voraussetzung) parallel laufen, so sind sie (nach §. 11, 2) alle drei parallel.

Nimmt man also die Seiten AB und ab als Grundlinien der Dreiecke ABC und abc an, so sind CG und cg ihre Höhen. Da nun die Grundlinien AB und ab oben als gleich erwiesen sind, so verhalten sich die Dreiecke wie ihre Höhen, und es ist folglich

$$\triangle\ ABC : abc = CG : cg.$$

Weiter sind aber Cc und Gg, als Lothe auf der Grundebene, parallel; daher verhält sich $CG : cg = FG : fg$,

also auch $\triangle\ ABC : abc = FG : fg.$

Denkt man sich nun die schiefe Ebene durch die zur Kante DE parallele AB begrenzt, so ist FG ihre Länge und Fg die zugehörige Basis. Also verhält sich das Dreieck ABC in der schiefen Ebene zu seiner Projection abc, wie die Länge der schiefen Ebene Fg zur zugehörigen Basis FG.

2) Ist keine Seite des Dreiecks ABC (Fig. 49) mit dem Grundschnitte DE parallel, so läßt sich dasselbe durch eine Linie AM aus einer Ecke A mit dem Grundschnitte DE parallel gezogen in zwei Dreiecke AMB und AMC zerschneiden, und wenn am die Projection von AM ist, so sind offenbar die Dreiecke abm und acm die Projectionen der Dreiecke ABM und ACM. Da aber die Seite AM mit dem Grundschnitte parallel ist, so verhält sich nach (1), wenn man der Kürze wegen die willkührliche Länge der schiefen Ebene mit l und die zugehörige Basis mit b bezeichnet:

$$\triangle\ AMB : amb = l : b.$$

(Denn der vorhergehende Beweis gilt offenbar auch dann, wenn die Spitze B des zu projicirenden Dreiecks AMB zwischen dem Grundschnitte DE der schiefen Ebene und der parallelen Seite AM liegt.) Eben so ist auch

$$\triangle\ AMC : amc = l : b = \triangle\ AMB : abm,$$

folglich auch

$$\triangle\ AMB + AMC : amb + amc = l : b,$$

d. h. $\triangle\ ABC : abc = l : b$, w. z. e. w.

Anm. Sollte die Parallele AM die Seite BC nicht selbst, sondern ihre Verlängerung schneiden, so würde man, statt die Dreiecke zu addiren, dieselben subtrahiren. Man kann aber auch die Ecke A allemal so wählen, daß die hindurch gezogene Parallele die gegenüberstehende Seite schneidet.

*§. 105. Lehrsatz.

Der Inhalt einer jeden geradlinigen oder krummlinigen Figur in einer schiefen Ebene verhält sich zu ihrer Projection wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Basis.

Beweis. Denn die geradlinige Figur läßt sich in Dreiecke zerschneiden, die zu ihren Projectionen in dem angegebenen Verhältnisse stehen. Die Projectionen der einzelnen Dreiecke bilden aber zusammen die Projection der ganzen gegebenen Figur, und wenn alle Theile der einen zu den Theilen der andern das nehmliche Verhältniß haben, so müssen sich offenbar auch auf gleiche Weise die ganzen Figuren verhalten (§. 180, 13 der Planimetrie).

Der Inhalt einer krummlinigen Figur kann nicht anders gefunden werden, als indem man sich dieselbe als ein Polygon von unendlich vielen Seiten denkt. Da nun der Satz von geradlinigen Figuren gilt, so muß er auch für krummlinige richtig sein.

Bemerkung. Man hat in den vorhergehenden Sätzen angenommen, daß die schiefe Ebene und die in derselben gezeichnete Figur ganz auf derselben

Seite des Grundschnitts liegen. Man begreift aber auf der Stelle, daß jene Sätze richtig bleiben, wenn eine Seite der Figur in den Grundschnitt fällt; und dasselbe gilt auch dann noch, wenn die zu projicirende Figur von dem Grundschnitte in zwei Theile zerschnitten wird. Denn da diese beiden Theile sich zu ihren Projectionen, welche zusammen die Projection der gegebenen Figur bilden, wie die Länge zur Basis verhalten, so muß dasselbe offenbar auch von den ganzen Figuren gelten (§. 180, 13 der Planimetrie).

Anm. 1) Ist der Inhalt einer beliebigen ebenen Figur J, der Inhalt ihrer Projection i und der spitze Winkel, unter welchem die schiefe Ebene die Grundebene schneidet, α, so ist $i = J\cos\alpha$.

Weiter mögen für die mit der Trigonometrie bekannten Leser noch folgende Sätze hier eine Stelle erhalten:

2) Wenn drei Ebenen auf einander senkrecht stehen (je zwei auf der dritten), und eine Linie bildet mit den Kanten (AX, AY, AZ in Fig. 50) die Winkel α, β, γ, so ist allemal

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

Denn projicirt man einen beliebigen Punkt B der gegebenen Linie AB = a auf die gegebenen Ebenen und bezeichnet die projicirenden Linien mit x, y, z, so ist

$$\begin{aligned} a^2 &= u^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= a^2\cos\alpha^2 + a^2\cos\beta^2 + a^2\cos\gamma^2, \end{aligned}$$

also $$1 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2.$$

3) Wenn man eine ebene Figur auf drei Ebenen projicirt, von denen immer je zwei auf der dritten senkrecht stehen, so ist das Quadrat des Inhalts der gegebenen Figur gleich der Summe der Quadrate der Inhalte der drei Projectionen; also wenn J den Inhalt der gegebenen Figur, i_1, i_2, i_3 die Inhalte der drei Projectionen bezeichnen: $J^2 = i_1{}^2 + i_2{}^2 + i_3{}^2$.

Denn wenn man aus A (Fig. 51) auf die Ebene XYZ der zu projicirenden Figur ein Loth AB fällt, so bildet dieses offenbar mit den drei Kanten dieselben Winkel, wie die Ebene der Figur mit den drei gegebenen Ebenen; (so ist z. B. im rechtwinkligen $\triangle$ ZAC Winkel BAZ = BCA); sind also diese Winkel, wie vorhin α, β, γ, so ist nach (1)

$$i_1 = J\cos\gamma, \quad i_2 = J\cos\beta, \quad i_3 = J\cos\alpha,$$

also $$i_1{}^2 + i_2{}^2 + i_3{}^2 = J^2(\cos\gamma^2 + \cos\beta^2 + \cos\alpha^2),$$

oder da $\cos\gamma^2 + \cos\beta^2 + \cos\alpha^2 = 1$ ist:

$$i_1{}^2 + i_2{}^2 + i_3{}^2 = J^2.$$

*§. 106. Zusatz.

Die Lage eines Punktes im Raume oder die Lage und Größe einer Linie ist offenbar durch die Projection auf eine Ebene nicht völlig bestimmt. Man nimmt zu dieser Bestimmung am einfachsten zwei sich senkrecht durchschneidende Projectionsebenen an. — Daß aber durch die Projectionen auf diese Ebenen ein Punkt oder eine Linie völlig bestimmt ist, fällt bald in die Augen; denn der fragliche Punkt liegt offenbar im Durchschnitt der beiden projicirenden Linien und die gerade oder krumme Linie, deren beide Projectionen gegeben sind, ist der Durchschnitt der beiden projicirenden ebenen oder krummen Flächen. — Außerdem ist klar, daß die oben erwiesenen Sätze über die Projectionen auf eine Ebene eben so auch von den Projectionen auf die andere Ebene gelten.

Anm. 1. Eine weitere Ausführung dieser und verwandter, in praktischer Hinsicht nicht unwichtigen, Lehren hat des beschränkten Raumes wegen hier keine Stelle erhalten können. Dagegen mögen einige unmittelbare Anwendungen der vorhergehenden Sätze noch kurz erwähnt werden.

Man bedient sich der bisher betrachteten Projection zur Abbildung von Theilen der Erdoberfläche und nennt dieselbe zum Unterschiede von andern Projectionsarten die orthographische Projection. Stellt man nach derselben die nördliche oder südliche Halbkugel dar und nimmt als Projectionsebene den Aequator an, so werden die Projectionen der Parallelkreise ihnen gleiche Kreise und die Projectionen der Meridiane gerade Linien, die sich alle in der Mitte, der Projection des Poles, vereinigen. — Bei der Abbildung der westlichen oder östlichen Halbkugel nimmt man den ersten Meridian als Projectionsebene an und erhält dann statt des Aequators und der Parallelkreise parallele gerade Linien; der erste Meridian bleibt ein Kreis ohne alle Aenderung, die übrigen Meridiane geben Ellipsen, und der mittelste, — der auf dem ersten senkrecht steht, wird in einer geraden Linie abgebildet.

Da bei dieser Projection die nahe am Umfange liegenden Theile in der auf den Umfang senkrechten Richtung allzu stark verkürzt und daher die Abbildungen derselben den wirklich stattfindenden Verhältnissen sehr unähnlich werden, so wendet man bei den Planigloben unserer Landcharten gewöhnlich eine andere, die stereographische Projection an. — Bei dieser denkt man sich — in ähnlicher Art, wie beim perspectivischen Zeichnen — das Auge in einen Punkt der Kugeloberfläche, welcher der Mitte des abzubildenden Landes gerade gegenüber liegt, von dieser Mitte nach dem Auge eine Linie gezogen und senkrecht auf dieselbe durch den Mittelpunkt der Kugel die Projectionsebene gelegt. Verbindet man nun den Ort des Auges mit einem der auf die Zeichnung überzutragenden Punkte, so ist der Einschnitt der Verbindungslinie in die Projectionsebene die gesuchte Projection. — Für die nördliche Halbkugel ist der Aequator die Projectionsebene und der Südpol der Ort des Auges (Polarprojection); die Projectionen der Parallelkreise sind Kreise, die aber sämmtlich kleiner ausfallen, als die Kreise selbst auf der Kugel; die Meridiane liefern gerade Linien, die sich in der Mitte vereinigen. — Bei der Abbildung der östlichen oder westlichen Halbkugel ist der erste Meridian die Projectionsebene und die Stelle des Auges ein Punkt des Aequators (Aequatorealprojection), der vom ersten Meridiane um 90^0 absteht. Die Projectionen der Meridiane und der Parallelkreise sind Kreisbogen; nur statt des Aequators und des mittelsten Meridianes erhält man zwei sich senkrecht schneidende Linien.

Für den Seefahrer ist es von besonderer Wichtigkeit, daß diejenige krumme Linie, welche alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet, — die loxodromische Curve, — in der Zeichnung als gerade Linie dargestellt werde. Um dieses zu erreichen, müssen zunächst die Meridiane selbst als parallele gerade Linien aufgezeichnet werden, so daß also die Längengrade, die in der Wirklichkeit gegen den Pol hin abnehmen, durchgehends eine gleiche Größe erhalten. Um aber dennoch das Verhältniß, welches in den einzelnen Gegenden zwischen Längen- und Breitengraden stattfindet, richtig darzustellen, vergrößert man die Breitengrade in der Zeichnung eben so vielmal, als in der Wirklichkeit die Längengrade abnehmen. Nach dieser Projection, die zuerst Mercator angewandt hat, werden gewöhnlich Seecharten entworfen. — Länder ganz in der Nähe des Poles lassen sich nach derselben gar nicht darstellen.

Anm. 2. In der Zeichenkunst wird verlangt, daß das Bild möglichst denselben Eindruck im Auge hervorbringe, wie der Gegenstand selbst. Die Wissenschaft, welche die Gesetze entwickelt, deren Beobachtung für diesen Zweck erforderlich sind,

heißt Perspective, und zwar Linear= oder geometrische Perspective, insofern nur die verschiedene Lage der abzubildenden Theile eines Gegenstandes in Betracht gezogen wird, zum Unterschiede von der Luftperspective, welche sich mit dem Tone der Farben beschäftigt. — Hier wird allein von der geometrischen Perspective die Rede sein. — Um das Bild eines Gegenstandes auf einer gegebenen Ebene — Tafel — zu erhalten, denkt man sich nach allen Punkten desselben von einem Punkte — dem Auge — aus gerade Linien gezogen; die Einschnittspunkte dieser Linien in die Tafel sind die gesuchten Bilder*). Von diesen gelten folgende Gesetze:

1) Das Bild eines Punktes ist wieder ein Punkt. — Sollte die Linie, vom Auge nach dem gegebenen Punkte gezogen, der Ebene der Tafel parallel laufen, so würde es gar nicht möglich sein, diesen Punkt auf der Tafel abzubilden.

2) Das Bild einer geraden Linie ist wieder eine gerade Linie, nehmlich der Einschnitt der durch das Auge und die gegebene Linie gelegten Ebene in die Ebene der Tafel. Wären diese beiden Ebenen parallel, so würde sich die gegebene Linie auf der Tafel gar nicht abbilden lassen. — Geht die Linie durch das Auge, so ist ihr Bild ein Punkt, nehmlich ihr Einschnitt in die Ebene der Tafel.

3) Das Bild einer krummen Linie ist wieder eine krumme Linie; es wird eine gerade Linie, wenn die krumme Linie ganz in einer durch das Auge gehenden Ebene liegt.

4) Wenn zwei Linien AB und CD (Fig. 52), — die nicht mit dem Auge O in einer Ebene liegen, — unter sich und mit der Ebene der Tafel parallel laufen, so sind auch ihre Bilder ab und cd parallel. — Denn die durch O und AB und CD gelegten Ebenen schneiden sich in einer Linie PQ, welche nach §. 11, 2, — wenn man sich durch die Parallelen AB und CD eine Ebene gelegt denkt, — mit AB und CD und folglich auch mit der Ebene der Tafel parallel ist; demnach müssen auch vermöge §. 11 die Linien ab und cd, in denen jene Ebenen die Ebene der Tafel schneiden, mit PQ und folglich auch unter sich parallel sein.

Wenn dagegen die Linien AB und CD (Fig. 52) zwar unter sich, aber nicht mit der Ebene der Tafel parallel sind, so laufen ihre Bilder auf der Tafel, wenn man sie hinreichend verlängert, in einem Punkte zusammen. — Denn wenn die Parallelen AB und CD die Tafel schneiden, so gilt dieß auch von der ihnen parallelen Kante PQ; es müssen sich daher auch nach §. 7 und 11 die Durchschnittslinien ab, cd und PQ in einem Punkte vereinigen (der natürlich in der Ebene der Tafel abcd liegt).

Da die Ebene der Tafel gewöhnlich vertical gedacht wird, so erklärt sich hieraus, warum vertikale Linien allemal parallele Bilder geben, während dieß nur von solchen horizontalen parallelen Linien gilt, die der Ebene der Tafel parallel sind. Im entgegengesetzten Falle convergiren die Bilder nach der Seite hin, nach welcher sich die Linien von der Tafel entfernen, weil offenbar nach dieser Seite hin sich PQ der Tafel nähert und dieselbe schneidet, (wenn nehmlich — wie immer in der Zeichenkunst — die Tafel sich zwischen dem Auge und den abzubildenden Linien befindet).

Insbesondere laufen die Bilder senkrecht in die Tiefe gehender Linien, d. h.

---

*) Die abzubildenden Punkte können eben so wohl mit dem Auge auf der nehmlichen Seite der Tafel, als auf der entgegengesetzten Seite liegen. In der Zeichenkunst wird die Tafel zwischen dem Auge und dem Gegenstande gedacht. Bei dem Schatten dagegen, welchen ein leuchtender Punkt in endlicher Entfernung von einem Gegenstande auf einer Ebene — Tafel — erzeugt, befinden sich der leuchtende Punkt und der Gegenstand auf derselben Seite der Tafel.

solcher Linien, welche eine zur Ebene der Tafel senkrechte Richtung haben, wenn sie verlängert werden, sämmtlich in dem Punkte, in welchem eine durch das Auge senkrecht auf die Ebene der Tafel gezogene Linie dieselbe trifft, in dem sogenannten Augenpunkte, zusammen.

5) Wenn zwei Linien, die nicht in der Ebene der Tafel liegen, sich schneiden, so schneiden sich auch ihre Bilder in dem Punkte, in welchem die aus dem Auge nach dem Durchschnittspunkte der gegebenen Linien gezogene Linie die Ebene der Tafel trifft; ist aber diese Linie der Ebene der Tafel parallel, so sind die Bilder parallele Linien.

Bemerkung. Die körperlichen Größen, welche wir in den vorhergehenden Abschnitten kennen gelernt haben, der Flächenwinkel und das körperliche Dreieck oder Vieleck, waren nur unvollständig begrenzt. Wir wenden uns nun zu der Betrachtung der vollständig von ebenen oder krummen Flächen begrenzten Körper und handeln zunächst von den an diesen Körpern vorkommenden oder in denselben zu construirenden Flächen und Linien und in einem weiter folgenden Abschnitte von der Vergleichung der Körper selbst ihrem räumlichen Inhalte nach.

Während in der Planimetrie in der Lehre von den Figuren die bei Weitem größere Zahl der Sätze die Größe der die Figuren begrenzenden oder zwischen bestimmten Punkten derselben zu ziehenden Linien und die gegenseitige Lage dieser Linien, die von denselben eingeschlossenen Winkel, betrifft, und nur ein verhältnißmäßig kleiner Theil die Größe der Figuren selbst, ihre Ausmessung, zum Gegenstande hat, macht umgekehrt in der Stereometrie grade die Vergleichung und Ausmessung des körperlichen Inhaltes den hauptsächlichsten Theil der von den vollständig begrenzten Körpern handelnden Sätze aus, indem in der That die Lehrgebäude der Stereometrie nur eine verhältnißmäßig kleine Zahl von Sätzen aufzuweisen haben, welche sich auf die an oder in den vollständig begrenzten Körpern vorkommenden Linien und Flächen beziehn.

Von den krummflächigen Körpern bildet in der elementaren Stereometrie allein die dem Kreise der Planimetrie entsprechende Kugel den Gegenstand einer umfassenden Erörterung, indem so wohl der Durchschnitt einer Kugelfläche mit einer Ebene, als auch mit einer zweiten Kugelfläche allemal in die Grenzen der elementaren Mathematik fällt, nehmlich eine Kreislinie darstellt, während dieß keineswegs mehr von den beiden andern krummflächigen Körpern, dem Cylinder und Kegel, gilt, deren die elementare Stereometrie nur in sofern gelegentlich Erwähnung thut, als sich deren Ausmessung nach den nehmlichen Formeln, welche für das Prisma und die Pyramide entwickelt werden, gewinnen läßt.

Ueberhaupt sind es unter den von ebenen Flächen eingeschlossenen Körpern vorzugsweise drei, nehmlich Prisma, Pyramide und Obelisk, deren Inhalt sich durch einfache, auf elementarem Wege abzuleitende Formeln ausdrücken läßt.

Ueber die gegenseitige Beziehung, welche zwischen diesen drei Körpern stattfindet, bemerken wir noch Folgendes: Wenn drei Ebenen sich in drei Linien durchschneiden, so sind, wie wir schon oben in §. 11 gesehn haben, nur zwei Fälle möglich; entweder erstens alle drei Kanten vereinigen sich in dem nehmlichen Punkte, oder zweitens sie sind alle drei parallel. Schneiden sich aber

vier oder mehr Ebenen in vier oder mehr Kanten, so kann zu den beiden angeführten Fällen noch der dritte hinzutreten, daß Kanten, welche nicht unmittelbar auf einander folgen, sondern durch eine oder mehrere zwischen liegende getrennt sind, sich kreuzen.

In dem ersten der angeführten Fälle, wenn nehmlich alle Kanten in einem Punkte zusammenstoßen, genügt es, um die entstandene körperliche Ecke zu einem vollständigen Körper der Pyramide abzuschließen, sämmtliche Seitenflächen mit einer von denselben verschiedenen Ebene zu durchschneiden. In dem zweiten Falle, wenn alle Kanten einander parallel sind, reicht eine schneidende Ebene allein für diesen Zweck nicht aus; es bedarf hierzu zweier Ebenen, welche, wenn der abzuschneidende Körper sich am einfachsten, zu einem Prisma, gestalten soll, einander parallel anzunehmen sind. Dasselbe gilt ganz eben so in dem dritten Falle, wenn die Kanten zum Theile sich kreuzen, wo dann durch die angegebene Construction der Obelisk hervorgeht.

Wir handeln nun dem Angeführten gemäß in den beiden folgenden Abschnitten von den Linien und Flächen, welche an und in den eckigen Körpern, ins Besondere dem Prisma, der Pyramide und dem Obelisken, und dann weiter an den runden Körpern, Cylinder, Kegel und Kugel, angetroffen werden, und in einem folgenden Abschnitte von der Vergleichung und Ausmessung des räumlichen Inhaltes dieser Körper selbst.

Fünfter Abschnitt.

Von den eckigen Körpern.

A. Von den regelmäßigen Körpern.

§. 107. Erklärung.

Ein überall begrenzter Raum heißt ein Körper (im eigentlichen oder engeren Sinne).

So wie die Figuren der Planimetrie in gradlinige, krummlinige und gemischtlinige zerfallen, so können auch die Körper entweder nur von ebenen oder nur von krummen Flächen oder von beiden zugleich eingeschlossen sein.

Ein Körper, welcher nur von ebenen Flächen begrenzt wird, wird ein eckiger Körper oder Polyeder genannt.

Die Linien, in welchen sich die begrenzenden Ebenen durchschneiden, werden Kanten, und die Punkte, in denen die Kanten zusammenstoßen, Ecken genannt.

§. 108. Erklärung.

Ein eckiger Körper heißt regelmäßig, wenn derselbe von lauter regelmäßigen Vielecken, welche in congruenten körperlichen Ecken zusammenstoßen, eingeschlossen wird.

Anm. Wenn man zwei gleiche Tetraeder so an einander legt, daß ein Paar congruente Seitenflächen sich decken, so erhält man einen von sechs regelmäßigen Dreiecken eingeschlossenen Körper (eine dreiseitige Doppelpyramide); dieser Körper ist aber nicht ganz regelmäßig, weil von den fünf Ecken desselben zwei gegenüberstehende dreiseitig, die drei andern aber vierseitig sind.

§. 109. Lehrsatz.

Es kann nicht mehr als fünf regelmäßige Körper geben; diese sind:

das Tetraeder,	begrenzt	von	4	regelmäßigen	Dreiecken;
= Hexaeder	=	=	6	=	Vierecken;
= Octaeder	=	=	8	=	Dreiecken;
= Dodecaeder	=	=	12	=	Fünfecken;
= Icosaeder	=	=	20	=	Dreiecken.

Beweis. Wie wir oben gesehn haben, betragen die Winkel, welche eine körperliche Ecke einschließen, allemal weniger, als 360^0. — Im gleichseitigen Dreiecke hat jeder Winkel 60^0; drei dieser Winkel in eine Ecke verbunden, machen 180^0, also weniger, als 360^0 aus. Aus dieser Verbindung entsteht das Tetraeder.

Es lassen sich aber auch vier solcher Winkel in eine Ecke zusammenstellen, wodurch das Octaeder hervorgeht, indem $4.\ 60 = 240 < 360$ ist.

Ferner geben noch fünf Winkel des gleichseitigen Dreiecks 300^0, also weniger, als 360^0; durch diese Zusammenstellung wird das Icosaeder erhalten.

Dagegen würden sechs solcher Winkel gerade 360^0 ausmachen, und es kann daher außer den genannten keinen von Dreiecken eingeschlossenen regelmäßigen Körper geben.

Im Quadrat hat jeder Winkel 90^0, deren drei also 270^0; diese Verknüpfung liefert das Hexaeder (Würfel).

Vier rechte Winkel enthalten gerade 360^0; demnach gibt es nur den einen von Quadraten begrenzten regelmäßigen Körper.

Im regelmäßigen Fünfecke betragen alle Winkel zusammen drei Flache oder 540^0 (Planimetrie §. 116); auf einen kommen folglich 108^0 und auf drei 324^0, also weniger, als 360^0. Der hieraus hervorgehende Körper ist das Dodecaeder. — Dagegen enthalten vier solcher Winkel 432^0, und es kann folglich außer dem Dodecaeder kein regelmäßiger Körper von Fünfecken begrenzt werden.

Im regelmäßigen Sechseck hat jeder Winkel 120^0, drei derselben haben also schon 360^0, und es gibt folglich überhaupt keinen von Sechsecken eingeschlossenen regelmäßigen Körper. — — Dieß gilt um so mehr von Siebenecken, Achtecken u. s. f., da die Größe der Winkel eines regelmäßigen Vielecks mit der Zahl seiner Seiten wächst.

Anm. Durch den vorhergehenden Satz ist nur dargethan, daß es keine andern, als die genannten regelmäßigen Körper geben kann; daß dieselben jedoch wirklich vorhanden sind, ist hiermit noch keineswegs bewiesen. Da der Beweis indeß für das Folgende ohne besondere Wichtigkeit ist, so ist er hier der Kürze wegen übergangen. — Der Anfänger wird übrigens nur durch das Vorzeigen von Modellen eine deutliche Vorstellung von jenen Körpern erhalten können. Ueber die Construction der regelmäßigen Körper handelt u. a. August in dem Programm des Kölnischen Realgymnasiums zu Berlin vom Jahre 1854.

B. Vom Prisma.

§. 110. Erklärung.

Ein nach zwei Seiten hin unbegrenzter Raum, der von Ebenen eingeschlossen wird, welche sich sämmtlich in parallelen Linien durchschneiden, heißt ein prismatischer Raum, und die ihn begrenzenden Ebenen heißen seine Seitenflächen.

Anm. Wenn man einen drei- oder mehrseitigen prismatischen Raum mit einer zu den parallelen Kanten senkrechten Ebene durchschneidet, so bildet der Durchschnitt ein Dreieck oder Vieleck, dessen Seiten und Winkel als die Maaße der den prismatischen Raum begrenzenden Seitenflächen und der von diesen eingeschlossenen Flächenwinkel angesehn werden können. Indem hierdurch die Betrachtung des drei- oder mehrseitigen prismatischen Raums einfach auf die des gradlinigen Dreiecks oder Vielecks zurückgeführt wird, bedarf es für den prismatischen Raum nicht wie für das körperliche Dreieck oder Vieleck, welches sich von dem gradlinigen Dreieck oder Vieleck durch mannigfaltige und eigenthümliche Eigenschaften unterscheidet, der Erörterung in einem besondern Abschnitte.

§. 111. Zusatz.

Werden die Seiten eines prismatischen Raumes von parallelen Ebenen durchschnitten, so sind die Durchschnitte congruente Vielecke.

Beweis. Sie stimmen in allen Winkeln überein, weil ihre Schenkel (nach §. 16) parallel laufen, (AB || ab [Fig. 53], AD || ad, also Winkel BAD = bad u. s. f.) und in allen Seiten, weil die von den Seitenflächen abgeschnittenen Vierecke Parallelogramme sind (AD || ad, Aa || Dd, folglich auch AD = ad u. s. f.).

§. 112. Erklärung.

Wenn man die Seitenflächen eines prismatischen Raumes durch zwei parallele Ebenen durchschneidet, so heißt der zwischen denselben enthaltene vollständig begrenzte Körper ein Prisma. — Ein Prisma ist also ein eckiger Körper, welcher von zwei congruenten und parallelen Vielecken, als Grundflächen, und von Parallelogrammen, als Seitenflächen, eingeschlossen wird. Die Linien, in welchen sich die Seitenflächen eines Prisma durchschneiden, heißen Seitenkanten oder vorzugsweise Kanten; die Durchschnittslinien zwischen den Seitenflächen und den Grundflächen werden Grundkanten genannt.

Der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen von einander heißt die Höhe des Prisma's.

Ein Prisma heißt gerade, wenn die (Seiten-) Kante auf der Grundfläche senkrecht ist.

§. 113. Zusatz.

1) Im geraden Prisma sind die Seitenflächen sämmtlich Rechtecke, und

2) ein Prisma ist gerade, wenn zwei zusammenstoßende Seitenflächen Rechtecke sind.

Beweis. 1) Wenn die Kante AE (Fig. 54) senkrecht auf der Grundfläche EFGH steht, so ist Winkel AEF = 90^0, und daher (nach §. 105 der Planimetrie) das Parallelogramm AEFB ein Rechteck. Dasselbe gilt eben so von den übrigen Seitenflächen; denn wenn eine Kante ein Loth ist, so sind es auch die übrigen.

2) Wenn die Seitenflächen AEFB und AEHD Rechtecke sind, so ist AE $\perp$ EF und EH und daher AE auch ein Loth auf der Ebene EFGH.

§. 114. Erklärung.

Ein Prisma, dessen Grundfläche Parallelogramme sind, also ein Körper, welcher überhaupt von sechs Parallelogrammen eingeschlossen ist (ABCDEFGH, Fig. 55), heißt ein Parallelepipedum. — Das Parallelepipedum heißt

rechtwinklig, wenn Grundflächen und Seitenflächen Rechtecke sind; sind dieselben überdieß sämmtlich Quadrate, so entsteht das Hexaeder, welches man auch Würfel oder Cubus nennt.

§. 115. Zusatz.

Im Parallelepipedum sind auch die gegenüberstehenden Seitenflächen parallel und congruent. — Man kann daher jedes Paar gegenüberstehender Seitenflächen als Grundflächen ansehen.

Beweis. Die Seitenflächen AEHD und BFGC (Fig. 55) sind zunächst parallel, weil zwei sich schneidende Linien in der einen zweien sich schneidenden Linien in der andern parallel sind, (z. B. AD || BC, weil nach der Voraussetzung ABCD ein Parallelogramm ist, und AE || BF). — Sie sind congruent, weil sie in allen Seiten (AD = BC, als gegenüberstehende Seiten des Parallelogramms ABCD, AE = BF u. s. w.) und in allen Winkeln (z. B. Winkel DAE = CBF, als Winkel mit parallelen Schenkeln) übereinstimmen.

C. Von der Pyramide.

§. 116. Erklärung.

Wenn man die Seiten einer körperlichen Ecke durch eine Ebene durchschneidet, so heißt der hierdurch von der Ecke abgeschnittene Körper eine Pyramide. — Eine Pyramide (ABCDE, Fig. 56) ist also ein Körper, welcher von einem Vielecke (BCDE) als Grundfläche und von Dreiecken als Seitenflächen, welche allein einem Punkte, der Spitze (A), zusammenstoßen, begrenzt wird.

Ein Loth (AG), aus der Spitze auf die Grundfläche gefällt, heißt die Höhe der Pyramide.

Anm. 1. Man pflegt bei der Benennung einer Pyramide ABCDE (Fig. 56) zuerst die Spitze A und dann die Grundfläche BCDE zu nennen.

Anm. 2. Die Pyramide ist unter den Körpern das, was das Dreieck unter den Vielecken ist. Während aber die Sätze, welche der Scharfsinn der Mathematiker über das Dreieck aufgefunden hat, nicht zu zählen sind, kennt man nur wenige Sätze über die Pyramide. — Wir führen hier als Beispiel die beiden folgenden auf:

1) In jeder Pyramide ist die Summe der Seitenflächen größer, als die Grundfläche.

Denn wenn zunächst die Höhe der Pyramide innerhalb oder in eine Seitenfläche fällt, so ist die Grundfläche gleich der Summe der Projectionen der Seitenflächen auf die Ebene der Grundfläche und folglich nach §. 103 kleiner, als die Summe der Seitenflächen selbst. — Wenn aber die Höhe außerhalb fällt, so ist die Grundfläche sogar kleiner, als die Summe der Projectionen der Seitenflächen.

2) Wenn in einer dreiseitigen Pyramide (ZAYX, Fig. 51), welche also von vier Dreiecken eingeschlossen ist, die Ebenen von dreien dieser Dreiecke (AZX, AZY und AXY) auf einander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Inhalte dieser drei Dreiecke gleich dem Quadrate des Inhalts des vierten Dreiecks (ZXY) zu Folge des in der Anm. zu §. 105 unter Nro. 3 erwiesenen Satzes, indem nehmlich die Dreiecke AZX, AZY und AXY die Projectionen des Dreiecks ZXY auf drei Ebenen sind, welche auf einander senkrecht stehen.

Dieser Satz bildet eine Analogie zum pythagoräischen Lehrsatze in der Planimetrie.

§. 117. Erklärung.

Eine Pyramide heißt **regelmäßig** (im weiteren Sinne), wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck und ihre Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke sind.

§. 118. Zusatz.

Die Höhe einer regelmäßigen Pyramide trifft die Grundfläche im Mittelpunkte.

Beweis. Die rechtwinkligen Dreiecke GHA und GHB (Fig. 57) sind congruent, da sie in den Hypotenusen GA und GB und der gemeinschaftlichen Cathete GH übereinstimmen; folglich ist auch $AH = BH$.

Aus gleichen Gründen ist $BH = CH = DH$ u. s. w.; also ist H der Mittelpunkt der Grundfläche.

§. 119. Lehrsatz.

Wenn man die Seitenflächen einer Pyramide mit einer der Grundfläche parallelen Ebene durchschneidet, so ist der Durchschnitt eine der Grundfläche ähnliche Figur, und diese beiden ähnlichen Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Beweis. Wenn die Ebene $bcde \parallel BCDE$ (Fig. 56) ist, so sind zunächst die Linien, in denen sie von den Seitenflächen geschnitten werden, nach §. 16 parallel, nehmlich $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$, $de \parallel DE$, $be \parallel BE$, und daher (nach §. 15) Winkel $bcd = BCD$, $cde = CDE$, $deb = DEB$, $ebc = EBC$; also stimmen die Vielecke in allen Winkeln überein. Dasselbe gilt auch von dem Verhältniß der gleichliegenden Seiten; da nehmlich $bc \parallel BC$ und $cd \parallel CD$ ist, so verhält sich: $bc : BC = Ac : AC$
und $cd : CD = Ac : AC$,
folglich auch $bc : BC = cd : CD$.

Eben so wird die Gleichheit der übrigen Verhältnisse zwischen den gleichliegenden Seiten erwiesen. — Demnach ist Vieleck $bcde \sim BCDE$.

Da sich nun ähnliche Vielecke (nach §. 210 der Planimetrie) wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten verhalten, so ist

$$bcde : BCDE = bc^2 : BC^2.$$

Weiter ist aber $bc : BC = Ab : AB$,
und wenn durch die Höhe AG und die Kante AB eine Ebene gelegt wird, so schneidet diese die parallelen Ebenen in den parallelen Linien bg und BG, und es verhält sich folglich:

$$Ab : AB = Ag : AG,$$

also auch $bc : BC = Ag : AG$
und $bc^2 : BC^2 = Ag^2 : AG^2$.

Oben ist $bcde : BCDE = bc^2 : BC^2$ erwiesen; es verhält sich daher auch

$$bcde : BCDE = Ag^2 : AG^2.$$

Anm. Dieser an sich wichtige und für die Ausmessung der Pyramide unentbehrliche Satz wird noch durch seine vielfachen Anwendungen in der Naturlehre besonders merkenswerth.

§. 120. Erklärung.

Wenn eine Pyramide (ABCDE, Fig. 56) von einer der Grundfläche (BCDE) parallelen Ebene (bcde) durchschnitten wird, so heißt der zwischen den beiden parallelen Ebenen enthaltene Theil (bcdeBCDE) eine **abgekürzte Pyramide**.

Die abgekürzte Pyramide wird also von zwei parallelen und ähnlichen Vielecken als Grundflächen und von Trapezen als Seitenflächen begrenzt, und die Verlängerungen der Seitenkanten vereinigen sich alle in dem nehmlichen Punkte.

D. Vom Obelisken.

§. 121. Erklärung.

Ein Körper (ABCDEA'B'C'D'E', Fig. 58), welcher von zwei parallelen Vielecken, als Grundflächen (ABCDE und A'B'C'D'E'), und von Trapezen *), als Seitenflächen, eingeschlossen wird, heißt ein Obelisk.

Der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen von einander wird die Höhe des Obelisken genannt.

Anm. Zu Folge der vorstehenden Erklärung schließt der weitere Begriff des Obelisken die engeren Begriffe des Prisma's und der abgekürzten Pyramide in sich, indem bei jenem noch das Merkmal hinzutritt, daß die Seitenkanten AA', BB', CC', DD', und EE' parallel laufen, bei dieser, daß die Verlängerungen sämmtlicher Seitenkanten sich in dem nehmlichen Punkte vereinigen, zwei Bedingungen, welche von den Seitenkanten eines Obelisken nicht erfüllt zu werden brauchen.

§. 122. Zusatz.

1) Die beiden Grundflächen eines Obelisken stimmen der Reihe nach in den Winkeln überein.

2) Ein Obelisk, dessen Grundflächen auch in der Größe der gleichliegenden Seiten der Grundflächen übereinstimmen, also congruent sind, ist ein Prisma, und

3) ein Obelisk, dessen Grundflächen im Verhältnisse der gleichliegenden Seiten übereinstimmen, also ähnlich sind, ist eine abgekürzte Pyramide.

4) Jeder dreiseitige Obelisk ist entweder ein Prisma oder eine abgekürzte Pyramide.

Beweis. 1) Der gegebene Obelisk sei Obelisk ABCDEA'B'C'D'E' (Fig. 58); da die Ebenen der Grundflächen ABCDE und A'B'C'D'E' nach dem vorhergehenden §. einander parallel sind, so müssen auch die Durchschnittslinien, in welchen sie von einer dritten Ebene durchschnitten werden, parallel sein, also

$$AB \parallel A'B',\ BC \parallel B'C',\ CD \parallel C'D' \text{ u. s. w.};$$

folglich sind auch nach §. 15 die von diesen Linien eingeschlossenen Winkel einander gleich, nehmlich

$$\text{W. } ABC = A'B'C',\ BCD = B'C'D' \text{ u. s. w.}$$

2) Wie wir so eben gesehen haben, sind bei einem jeden Obelisken die gleichliegenden Seiten der Grundflächen einander parallel,

$$AB \parallel A'B',\ BC \parallel B'C',\ CD \parallel C'D' \text{ u. s. w.}$$

Wenn diese Linien nun überdieß noch einander gleich sind, so sind die Vierecke

$$ABA'B',\ BCB'C',\ CDC'D' \text{ u. s. w.}$$

sämmtlich Parallelogramme, folglich auch die Seitenkanten

$$AA',\ BB',\ CC' \ldots$$

alle einander parallel und daher der Obelisk ABCDEA'B'C'D'E' nach §. 110 und 112 ein Prisma.

---

*) Unter einem Trapeze wird ein Viereck verstanden, in welchem zwei gegenüberstehende Seiten parallel laufen.

3) Wenn dagegen die gleichliegenden Seiten der Grundflächen nicht gerade gleiche Größe, aber doch einerlei Verhältniß zu einander haben,

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' \text{ u. s. w.}$$

gegeben ist, so müssen sich die Verlängerungen sämmtlicher Seitenkanten AA', BB', CC' . . . in dem nehmlichen Punkte vereinigen. Denn angenommen, die verlängerte Seitenkante AA' träfe mit der verlängerten Seitenkante BB' in einem Punkte X und die verlängerte Seitenkante CC' mit BB' in einem andern Punkte Z zusammen; dann müßte sich, da $AB \parallel A'B'$ und $BC \parallel B'C'$ ist, verhalten:

$$AB : A'B' = BX : B'X \text{ und } BC : B'C' = BZ : B'Z,$$

folglich auch, da nach der Voraussetzung $AB : A'B' = BC : B'C'$ ist:

$$BX : B'X = BZ : B'Z$$

und weiter nach einem bekannten Satze der Proportionen

$$BX - B'X : B'X = BZ - B'Z : B'Z,$$

d. h.
$$BB' : B'X = BB' : B'Z,$$

was offenbar unmöglich ist. — Demnach müssen sich die verlängerten Seitenkanten AA', BB', und CC' in dem nehmlichen Punkte durchschneiden, und da dasselbe eben so von den übrigen Seitenkanten erwiesen werden kann, so ist folglich der Obelisk ABCDEA'B'C'D'E' eine abgekürzte Pyramide, wenn nehmlich vorausgesetzt ist, daß die beiden Vielecke ABCDE und A'B'C'D'E' einander ähnlich sind.

4) Da die Grundflächen eines jeden Obelisken nach Nro. 1 in den Winkeln übereinstimmen und Dreiecke, welche gleiche Winkel haben, wenn nicht congruent, doch jedenfalls ähnlich sind, so ist vermöge Nro. 3 jeder dreiseitige Obelisk entweder ein Prisma oder eine abgekürzte Pyramide.

Anm. Die Richtigkeit der letzten Behauptung folgt außerdem auch aus §. 11, nach welchem die Kanten, in denen sich drei Ebenen schneiden, entweder alle drei parallel sind, oder sich in dem nehmlichen Punkte vereinigen.

§. 123. Lehrsatz.

1) Wenn man die Seitenflächen eines Obelisken ABCDEA'B'C'D'E' (Fig. 58) mit einer den Grundflächen parallelen Ebene in gleichem Abstande von denselben durchschneidet, so schließen die Durchschnittslinien ein Vieleck $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$ ein, dessen Seiten den halben Summen der gleichliegenden Seiten und dessen Winkel den gleichliegenden Winkeln der beiden Grundflächen des Obelisken gleich sind. — Man nennt dieses Vieleck $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$ die mittlere Durchschnittsfigur des Obelisken.

2) Wenn man aus einem beliebigen Punkte (f) in der Ebene des mittleren Durchschnitts Parallelen zu den Seitenkanten des Obelisken zieht und die Punkte, in welchen dieselben die Ebene einer der beiden Grundflächen schneiden, der Reihe nach mit einander verbindet, so entsteht ein Vieleck (abcde), dessen Seiten den halben Differenzen der gleichliegenden Seiten und dessen Winkel den gleichliegenden Winkeln der beiden Grundflächen des Obelisken gleich sind. — Dieses Vieleck (abcde) wird die Ergänzungsfigur des Obelisken genannt.

3) Die Ergänzungsfigur wird immer als dieselbe erhalten, aus welchem Punkte der mittleren Durchschnittsebene und nach welcher der beiden Grundflächen die Parallelen mit den Seitenkanten des Obelisken gezogen werden.

Beweis. Da die Ebene $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \parallel ABCDE$ ist, so ist auch

$$\alpha\beta \parallel AB,\ \beta\gamma \parallel BC,\ \gamma\delta \parallel CD \text{ u. s. w.},$$

folglich W. $\alpha\beta\gamma = ABC$, W. $\beta\gamma\delta = BCD$ u. s. w.

Da ferner die Ebene $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ nach der Voraussetzung von den beiden Ebenen ABCDE und A'B'C'D'E' gleichen Abstand hat, so ist auch, wie leicht zu sehen:

$$A\alpha = A'\alpha,\ B\beta = B'\beta,\ C\gamma = C'\gamma \text{ u. s. w.},$$

folglich nach §. 114 der Planimetrie

$$\alpha\beta = \frac{AB + A'B'}{2},\ \beta\gamma = \frac{BC + B'C'}{2} \text{ u. s. w.}$$

2) Wenn man $\alpha B'' \parallel \beta B$ zieht, so ist auch $\alpha B'' \parallel$ fb, weil fb $\parallel \beta B$ vorausgesetzt ist, und da überdieß fa $\parallel \alpha A$ ist, so ist nach §. 15 Ebene afb $\parallel$ $A\alpha B''$, folglich auch die Durchschnittslinie

$$ab \parallel AB$$

Eben so findet man bc $\parallel$ BC, cd $\parallel$ CD u. s. w.;

Demnach ist zu Folge §. 15

W. abc = ABC, bcd = BCD u. s. w.

Weiter ist nach §. 19, 3

$$\left.\begin{array}{l} af = A\alpha \\ bf = B''\alpha \end{array}\right\}$$ weil die Ebene $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, in welcher der Punkt f angenommen ist, mit der Ebene ABCDE parallel ist

und nach §. 13 W. afb = $A\alpha B''$, weil fa $\parallel \alpha A$ und fb $\parallel \alpha A''$ ist;

---

folglich ist $\triangle$ abf $\cong AB''\alpha$

und ab = AB''.

Nach §. 115 der Planimetrie ist aber AB'', also auch

$$ab = \frac{AB - A'B'}{2}.$$

Eben so findet man ferner

$$bc = \frac{BC - B'C'}{2},\ cd = \frac{CD - C'D'}{2} \text{ u. s. w.}$$

Die Behauptung (3) aber ist an sich klar, da Vielecke, welche in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, nothwendig congruent sind.

*§. 124. Lehrsatz.

Bei jedem Obelisken ist die halbe Summe der beiden Grundflächen (G und G') gleich der Summe aus der mittleren Durchschnittsfigur (M) und der Ergänzungsfigur (E), also in Zeichen

$$\frac{G + G'}{2} = M + E.$$

Beweis. Es sei zunächst ein dreiseitiger Obelisk ABCA'B'C' (Fig. 77) gegeben und $\alpha\beta\gamma$ die mittlere Durchschnittsfigur. Durch eine Ecke derselben, α, ziehe man DD' $\parallel$ BB' und EE' $\parallel$ CC', ferner durch die Ecke β FF' $\parallel$ CC'; dann ist die mittlere Durchschnittsfigur

$$\alpha\beta\gamma = EFC = ABC - BDEF - ADE$$

und auch $$\alpha\beta\gamma = E'F'C' = A'B'C' + B'D'E'F' - A'D'E',$$

folglich, da BDEF = B'D'E'F', wie leicht zu sehen, und $\triangle$ ADE, so wie auch $\triangle$ A'D'E', gleich der Ergänzungsfigur ADE ist:

$$2\alpha\beta\gamma = ABC + A'B'C' - 2ADE$$

oder $$\frac{ABC + A'B'C'}{2} = \alpha\beta\gamma + ADE.$$

Es sei ferner ein vierseitiger Obelisk, ABCDA'B'C'D' (Fig. 78) gegeben; — man lege durch eine Seitenkante AA' eine willkührliche Ebene und erweitere die nicht durch diese Kante gehenden Seitenflächen BB'CC' und CC'DD', bis sie die Ebene in den Kanten EE' und FF' durchschneiden. Dann entstehen drei dreiseitige Obelisken CEFC'E'F', ABEA'B'E' und ADFA'D'F'. Wenn wir nun für diese und den gegebenen vierseitigen Obelisken ABCDA'B'C'D' die mittleren Durchschnittsfiguren und die Ergänzungsfiguren nach Anleitung des vorhergehenden §. construiren und auf die schon mehr angewendete Art bezeichnen, so werden wir zu Folge des bereits für den dreiseitigen Obelisken geführten Beweises setzen können:

$$\frac{CEF + C'E'F'}{2} = \gamma\varepsilon\varphi + cef$$

$$\frac{ABE + A'B'E'}{2} = \alpha\beta\varepsilon + abe$$

$$\frac{ADF + A'D'F'}{2} = \alpha\delta\varphi + adf.$$

Subtrahiren wir die beiden letzten Gleichungen von der ersten, so ergiebt sich

$$\frac{ABCD + A'B'C'D'}{2} = \alpha\beta\gamma\delta + abcd.$$

Eben so läßt sich dasselbe für einen fünf- und mehrseitigen Obelisken darthun.

Anm. 1. Wir haben uns im Beweise dieses und des vorhergehenden §. auf den Fall beschränkt, welcher am häufigsten Anwendung findet, daß sämmtliche Seiten der einen Grundfläche größer sind, als die gleichliegenden Seiten der andern Grundfläche. Man wird sich jedoch auch in jedem besonderen Falle, in welchem diese Bedingungen nicht erfüllt sein sollten, leicht von der Richtigkeit der aufgestellten Behauptungen überzeugen können.

Sind wirklich in einem Obelisken sämmtliche Seiten der einen Grundfläche größer, als die gleichliegenden Seiten der andern, so folgt aus dem letzten Satze, daß die mittlere Durchschnittsfigur kleiner ist, als das arithmetische Mittel der Grundflächen um die Größe der Ergänzungsfigur. — Man vergleiche auch noch den Beweis des §. 169 und die Anm. 2 zu §. 172.

Anm. 2. Nennt man eckige Körper ähnlich, wenn sie von ähnlichen Polygonen eingeschlossen werden, und die Ecken des einen den Ecken des andern congruent sind, so lassen sich leicht folgende Sätze erweisen:

1) In ähnlichen Körpern sind die ähnlich liegenden Kanten und Seitenflächen proportionirt, und da sich diese wie die Quadrate ähnlich liegender Kanten verhalten, so stehen auch die ganzen Oberflächen in dem angezeigten Verhältniß zu einander.

2) Die Grundflächen ähnlicher Pyramiden oder Prismen verhalten sich nach (1) wie die Quadrate zweier ähnlich liegenden Seitenkanten, also auch wie die Quadrate der Höhen, da diese mit den Seitenkanten in ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken liegen.

3) Wird eine Pyramide durch eine der Grundfläche parallele Ebene durchschnitten, so ist die abgeschnittene kleinere Pyramide der ganzen ähnlich. (Vergl. Fig. 56 und §. 119.)

Anm. 3. Auch der folgende allgemeine und merkwürdige Satz mag hier noch eine Stelle erhalten.

Bezeichnet man die Zahl der Flächen, welche einen eckigen Körper einschließen, mit F, die Zahl seiner Ecken und Kanten beziehlich mit E und K, so ist: $F + E = K + 2$.

Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, daß die Polygone, welche den Körper begrenzen, von zusammenhängenden gebrochenen Linien eingeschlossen werden; (denn für einen Körper, wie den durch Fig. 59 dargestellten, gilt der Satz nicht.)

Beweis. Wir wollen irgend eine Grenzfläche des Körpers die erste nennen und dann die übrigen so weiter zählen, daß jede folgende mit der nächstvorhergehenden eine Kante gemeinschaftlich hat, und wenn eine folgende Fläche mit mehreren vorhergehenden gemeinschaftliche Kanten hat, so sollen diese allemal eine zusammenhängende gebrochene Linie bilden. Diese Bedingung des Zählens ist, wie man leicht sieht, allemal zu erfüllen, den oben angegebenen Ausnahmefall abgerechnet, für welchen aber auch der Satz nicht mehr nothwendig gilt. Es sei ferner die Zahl der Kanten und Ecken, welche in der ersten Fläche liegen, mit K_1 und E_1, dann die Zahl der Kanten und Ecken in den beiden ersten Grenzflächen zusammen mit K_2 und E_2, in den drei ersten mit K_3 und E_3 u. s. f. bezeichnet, so nehmlich, daß eine Ecke oder Kante, welche mehreren Grenzflächen gemeinschaftlich ist, immer nur einmal gezählt wird. Hat nun das erste Polygon a Seiten, so ist $K_1 = a$ und $E_1 = a$, also

$$K_1 - E_1 = 0.$$

Das zweite Polygon, welches b Seiten haben mag, liefert nur $b - 1$ neue Kanten und $b - 2$ neue Ecken, weil es eine Kante und zwei Ecken mit dem ersten gemeinschaftlich hat. Demnach ist $K_2 = a + b - 1$ und $E_2 = a + b - 2$, folglich

$$K_2 - E_2 = 1.$$

Wird jetzt das dritte Polygon, dessen Seitenzahl c sein mag, hinzugefügt, so wird dieses entweder nur mit dem zweiten, oder sowohl mit dem zweiten, als mit dem ersten eine Kante gemeinschaftlich haben. — Im ersten Falle liefert es $c - 1$ neue Kanten und $c - 2$ neue Ecken, im andern Falle $c - 2$ neue Kanten und $c - 3$ neue Ecken, also jedenfalls liefert es eine Kante mehr, als Ecken; demnach ist offenbar

$$K_3 - E_3 = 2.$$

Man sieht nun schon ganz deutlich, daß auch das vierte Polygon eine neue Kante mehr, als neue Ecken liefert, (es mag nun nur mit dem dritten, oder mit zweien der vorhergehenden, oder mit allen drei Polygonen gemeinschaftliche Kanten haben, wenn nur überhaupt der Körper mehr als vier Seitenflächen hat); und es ist folglich

$$K_4 - E_4 = 3.$$

Auf gleiche Weise findet man

$$K_5 - E_5 = 4,$$

(wenn nehmlich der Körper mehr als fünf Grenzflächen hat), — und wenn der Körper überhaupt von n Polygonen eingeschlossen ist, und von diesen $n - 1$ in der angegebenen Art verbunden sind: $K_{n-1} - E_{n-1} = n - 2$.

Wird nun noch die letzte, nte Grenzfläche hinzugefügt, so ist klar, daß diese weder neue Ecken, noch neue Kanten liefert, und es ist daher auch

$$K_n - E_n = n - 2,$$

oder nach der oben angegebenen Bezeichnungsweise, wo $K_n = K$, $E_n = E$ und $n = F$ gesetzt ist, $K - E = F - 2$,

also $K + 2 = F + E$.

Der vorstehende Satz heißt der Euler'sche und der so eben angeführte sehr einfache Beweis desselben ist im Wesentlichen aus Grunert's Lehrb. der Stereom. entlehnt.

Sechster Abschnitt.

Von den runden Körpern.

A. Vom Cylinder.

§. 125. Erklärung.

Wenn die Grundflächen eines Prisma's regelmäßige Vielecke sind, und man denkt sich die Anzahl ihrer Seiten fortwährend wachsend, so nähern sich die Grundflächen immer mehr dem Kreise und das Prisma selbst einem Cylinder. — Ein Cylinder (Walze, Welle) ist nehmlich ein Körper, welcher von zwei parallelen Kreisen, als Grundflächen, und einer krummen Fläche, welche man Mantel nennt, eingeschlossen ist. Der Mantel hat die Eigenschaft, daß sich auf demselben gerade Linien ziehen lassen, welche alle unter sich und mit der Axe, d. h. mit der Linie, welche die Mittelpunkte der Grundflächen verbindet, parallel sind.

Der Cylinder heißt gerade, wenn die Axe AB (Fig. 60, a) auf der Grundfläche senkrecht steht, schief, wenn dieses nicht der Fall ist.

Anm. Ein gerader Cylinder entsteht, wenn ein Rechteck um eine Seite, als Axe, gedreht wird; die gegenüberliegende Seite beschreibt den Mantel, und die beiden anderen Seiten beschreiben die Grundflächen des geraden Cylinders.

§. 126. Zusatz.

Aus der vorhergehenden Erklärung folgt:

1) Wenn man einen Cylinder mit einer Ebene durchschneidet, welche durch die Axe geht, so ist der Durchschnitt ein Parallelogramm; (beim geraden Cylinder ein Rechteck).

2) Wenn man einen Cylinder mit einer den Grundflächen parallelen Ebene durchschneidet, so ist der Durchschnitt ein Kreis.

§. 127. Zusatz.

1) Der Mantel des geraden Cylinders ist einem Rechtecke gleich, welches die Peripherie der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Cylinders zur Höhe hat.

2) Ist daher r der Radius, h die Höhe des Cylinders (Fig. 60, a), so ist der Flächeninhalt des Mantels $M = 2r\pi h$.

Beweis zu (2). Denn das Rechteck hat zur Höhe h und zur Grundlinie die Peripherie $2r\pi$ (§. 221 der Planimetrie).

Anm. 1. Wenn z. B. $r = 4'$, $h = 5'$ gegeben ist und wir statt π den Näherungswerth $3^1/_7$ setzen, so ist

$$M = 2 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 3^1/_7 = 125^5/_7 \,\square'.$$

Anm. 2. Der Mantel des schiefen Cylinders läßt sich auf elementarem Wege nicht berechnen.

Anm. 3. Nennt man zwei gerade Cylinder ähnlich, wenn ihre Höhen sich wie die Durchmesser verhalten, so ergibt sich leicht noch Folgendes:

Die Grundflächen, die Mäntel und folglich auch die ganzen Oberflächen zweier ähnlichen geraden Cylinder verhalten sich wie die Quadrate der Höhen oder Durchmesser.

B. Vom Kegel.

§. 128. Erklärung.

Wenn die Grundfläche einer Pyramide ein regelmäßiges Vieleck ist und man denkt sich die Anzahl der Seiten in's Unendliche wachsend, so geht die Grundfläche in einen Kreis und die Pyramide in einen Kegel über. — Ein **Kegel** ist nehmlich ein Körper, welcher von einem Kreise, als Grundfläche, und von einer krummen Fläche, welche **Mantel** heißt, eingeschlossen ist. Der Mantel hat die Eigenschaft, daß sich auf demselben gerade Linien ziehen lassen, welche sich alle in einem Punkte, der **Spitze**, vereinigen. Die Linie AB (Fig. 60, b) welche die Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet, wird **Axe**, und eine Linie, aus der Spitze nach einem Punkte des Umfanges der Grundfläche gezogen, wird **Seitenlinie** genannt.

Ein Kegel heißt **gerade**, wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht.

Anm. Beim geraden Kegel sind alle Seitenlinien gleich lang, beim schiefen Kegel haben die Seitenlinien eine verschiedene Länge.

Ein gerader Kegel entsteht, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck um eine Cathete, als Axe, dreht; die andere Cathete beschreibt die Grundfläche, und die Hypotenuse beschreibt den Mantel des geraden Kegels.

§. 129. Zusatz.

Aus der vorhergehenden Erklärung folgt:

1) Wenn man einen Kegel mit einer Ebene durchschneidet, welche durch die Axe geht, so ist der Durchschnitt ein Dreieck, (beim geraden Kegel ein gleichschenkliges Dreieck).

2) Wenn man einen Kegel mit einer der Grundfläche parallelen Ebene durchschneidet, so erhält man zum Durchschnitt einen Kreis.

Das vom Kegel abgeschnittene Stück, welches zwischen der Grundfläche und dem ihr parallelen Kreise liegt, heißt ein **abgekürzter Kegel**.

§. 130. Zusatz.

1) Der Mantel des geraden Kegels ist einem Dreiecke gleich, welches die Seitenlinie zur Höhe und den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie hat.

2) Ist daher M der Inhalt des Mantels, f die Seitenlinie, r der Radius der Grundfläche (Fig. 60, b) so ist:

$$M = r\pi f.$$

Beweis. 1) Der Mantel des geraden Kegels läßt sich in einen Kreisausschnitt aufrollen, der die Seitenlinie zum Radius und die Peripherie der Grundfläche zum Bogen hat. Der Ausschnitt ist aber einem Dreiecke gleich, das den Radius (die Seitenlinie) zur Höhe und den Bogen (Umfang der Grundfläche) zur Grundlinie hat.

2) Die Formel für den Inhalt eines Dreiecks ist nach §. 219 der Planimetrie: $J = \frac{gh}{2}$.

Im vorliegenden Falle ist $J = M$, $g = 2r\pi$ (vermöge §. 221 der Planimetrie) $h = f$, also $M = \frac{2r\pi f}{2} = r\pi f$.

Anm. 1. Ist z. B. $r = 3''$ und $f = 5''$, so ist (näherungsweise)

$$M = 3 \,.\, 5 \,.\, 3^1/_7 = 47^1/_7 \square''.$$

Anm. 2. Der Mantel des schiefen Kegels läßt sich, so wie der Mantel des schiefen Cylinders, nur mit Hülfe der höhern Mathematik berechnen.

Anm. 3. Nennt man gerade Kegel ähnlich, wenn sich ihre Höhen wie ihre Durchmesser verhalten, so wird man sich leicht von der Richtigkeit des folgenden Satzes überzeugen können:

Die Grundflächen, die Mäntel und folglich auch die ganzen Oberflächen ähnlicher gerader Kegel verhalten sich wie die Quadrate ihrer Höhen oder Durchmesser.

§. 131. Zusatz.

1) Der Mantel des geraden abgekürzten Kegels ist einem Trapeze gleich, welches zu den beiden parallelen Seiten die Peripherien der Grundflächen und zur Höhe die Seitenlinie des abgekürzten Kegels hat.

2) Sind daher r und ϱ die Radien der Grundflächen und ist f die Seitenlinie, so ist der Inhalt des Mantels:

$$M = (r+\varrho)\pi f.$$

Beweis. Die Behauptung (1) ist vermöge (1) im vorhergehenden §. an sich klar; daraus folgt sogleich (2); denn nach §. 219 der Planimetrie ist die Formel für den Inhalt des Trapezes

$$J = \frac{(a+b)}{2} . h,$$

wo a und b die beiden Parallelen und h die Höhe bezeichnet. Hier ist $J = M$, $a = 2r\pi$, $b = 2\varrho\pi$, $h = f$ zu setzen; dadurch verwandelt sich die vorstehende Formel in:

$$M = \frac{(2r\pi + 2\varrho\pi)f}{2} = \frac{2\pi(r+\varrho)f}{2} = \pi(r+\varrho)f.$$

Anm. Ist z. B. $r = 5''$, $\varrho = 3''$ und $f = 4''$ so ist (näherungsweise)

$$M = 8 . 4 . 3^1/_7 = 100^4/_7 \square''.$$

C. Von der Kugel.

§. 132. Erklärung.

Ein Körper, dessen krumme Grenzfläche von einem innern Punkte überall gleich weit absteht, heißt eine Kugel. — Mittelpunkt — Radius — Durchmesser.

§. 133. Zusatz.

Ein Punkt liegt innerhalb oder außerhalb oder gerade auf der Kugelfläche, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkte kleiner, größer oder eben so groß ist, als der Radius.

§. 134. Zusatz.

1) Eine Linie schneidet die Kugelfläche, berührt dieselbe oder trifft sie gar nicht, je nachdem ihr Abstand vom Mittelpunkte kleiner, als der Radius, oder eben so groß, oder größer ist.

2) Dasselbe gilt eben so von einer Ebene.

Der Beweis ist ganz der nehmliche, wie für die ähnlich lautenden Behauptungen über den Kreis in §. 128 und 131 der Planimetrie.

§. 135. Lehrsatz.

Der Durchschnitt einer Ebene mit der Kugelfläche ist ein Kreis. — Geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so ist dieser auch Mittelpunkt des Kreises; geht aber die Ebene des Durchschnitts nicht durch den Kugelmittelpunkt, so liegt der Mittelpunkt des Kreises in dem Fußpunkte des aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Durchschnittsebene gefällten Lothes.

Beweis. Wenn die Durchschnittsebene durch den Kugelmittelpunkt geht, fällt die Richtigkeit des Satzes in die Augen. — Im andern Falle sei M der Mittelpunkt der Kugel (Fig. 61, a), MC das Loth auf die Durchschnittsebene, A und B seien zwei beliebige Punkte des Durchschnitts und nach denselben die Radien MA und MB gezogen. Dann stimmen die rechtwinkeligen Dreiecke MCA und MCB in den Hypotenusen MA und MB und der gemeinschaftlichen Cathete MC überein, folglich ist auch die andere Cathete CA = CB. Eben so folgt, daß alle andern Punkte des Durchschnitts von C gleichen Abstand haben; der Durchschnitt ist folglich ein Kreis und C sein Mittelpunkt.

§. 136. Zusatz.

1) Die Linie, welche den Kugelmittelpunkt mit dem Mittelpunkt eines Kugelkreises (eines Kreises, dessen Peripherie in der Kugelfläche liegt) verbindet, steht senkrecht auf der Ebene des Kugelkreises.

2) Ein Loth auf der Ebene eines Kugelkreises in seinem Mittelpunkte errichtet, geht durch den Kugelmittelpunkt.

Beweis. Beide Behauptungen folgen leicht indirect aus dem vorhergehenden §.

§. 137. Zusatz.

1) Kreise, deren Mittelpunkte im Mittelpunkt der Kugel liegen, sind größer, als alle andern Kugelkreise und heißen größte oder Hauptkreise; die anderen nennt man kleinere oder Nebenkreise.

2) Kugelkreise sind gleich, wenn ihre Ebenen gleich weit vom Mittelpunkte der Kugel abstehen; sie werden um so kleiner, je weiter sich ihre Ebenen vom Mittelpunkte der Kugel entfernen.

Die Beweise sind ganz dieselben, wie für die ähnlich lautenden Sätze über die Sehne in der Planimetrie (§. 122 und 124).

*§. 138. Lehrsatz.

Durch vier Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, läßt sich allemal eine und auch nur eine einzige Kugelfläche legen.

Beweis. Die gegebenen vier Punkte seien A, B, C, D (Fig. 61, b); — man lege durch A, B, C und durch B, C, D eine Ebene, beschreibe in der ersten einen Kreis durch die Punkte A, B, C und eben so in der zweiten durch B, C, D; hierauf halbire man die beiden gemeinschaftliche Sehne BC in E, verbinde diesen Punkt mit den Mittelpunkten F und G der beiden Kreise, lege durch F, E, G eine Ebene und ziehe in derselben $FH \perp EF$ und $GH \perp EG$; — dann ist der Durchschnittspunkt H dieser beiden Lothe der Mittelpunkt der gesuchten Kugel. —

Denn nach der Construction ist die Kante $BC \perp FE$ und EG, daher auch Ebene ABC und $BCD \perp HFEG$; und da HF und HG in der senkrechten Ebene HFEG senkrecht auf die Kanten FE und EG gezogen sind, so sind sie

auch auf den Ebenen ABC und BCD senkrecht. Nun ist $\triangle$ AFH $\cong$ BFH $\cong$ CFH, (weil HF = HF = HF, AF = BF = CF, Winkel AFH = BFH = CFH ist), folglich ist auch HA = HB = HC. Eben so ist $\triangle$ BGH oder CGH $\cong$ DGH und daher HB oder HC = HD. Demnach geht eine mit einer der vier gleichen Linien HA, HB, HC oder HD aus dem Mittelpunkte H beschriebene Kugelfläche durch die vier Punkte A, B, C und D.

Eine zweite Kugelfläche läßt sich aber durch diese vier Punkte nicht legen, weil der Mittelpunkt derselben (vermöge §. 136, 2) in jedem der beiden Lothe HF und HG, also in ihrem Durchschnittspunkte H liegen muß.

Anm. Ueber Kugeln, welche sich schneiden oder berühren, gelten im Wesentlichen dieselben Bestimmungen, wie von Kreisen in der Planimetrie (§. 148—155).

§. 139. Erklärung.

Der Kugeldurchmesser, welcher auf der Ebene eines Kugelkreises senkrecht steht, (und also vermöge §. 134 durch den Mittelpunkt desselben geht,) heißt die Axe, und seine Endpunkte heißen die Pole des Kugelkreises.

§. 140. Zusatz.

1) Parallele Kugelkreise haben einerlei Axe und Pole.

2) Legt man durch die Pole paralleler Kugelkreise Hauptkreise, so schneiden diese von den Parallelkreisen ähnliche Bogen ab.

3) Die Bogen dieser Hauptkreise, welche zwischen einem Pole und einem Parallelkreise enthalten sind, sind gleich.

Beweis. 1) Der Durchmesser, welcher auf dem einen Parallelkreise senkrecht ist, ist auch auf allen andern senkrecht und daher die gemeinschaftliche Axe sämmtlicher Parallelkreise.

2) Die Centriwinkel ACB und DEF (Fig. 62) sind gleich, weil ihre Schenkel parallel laufen; es haben daher auch die Bogen AB und DF zu ihren Peripherien einerlei Verhältniß.

3) Da PC = PC, Winkel PCA = PCB, CA = CB ist, so ist $\triangle$ PCA $\cong$ PCB, folglich PA = PB, und da in congruenten Kreisen zu gleichen Sehnen auch gleiche Bogen gehören, so ist auch Bogen PA = PB.

Bemerkung. Da die Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser als Axe erzeugt und die Peripherie dieses Halbkreises als die Summe unendlich vieler unendlich kleiner Sehnen angesehen werden kann, so hat man, um zu einem Ausdruck für den Inhalt der Kugelfläche zu gelangen, vorher die von einer Sehne bei der angegebenen Umdrehung beschriebene krumme Fläche näher zu betrachten.

§. 141. Lehrsatz.

Wenn man einen Halbkreis um seinen Durchmesser als Axe herumdreht, so beschreibt eine in dem Halbkreise gezogene Sehne (AB in Fig. 65) im Allgemeinen den Mantel eines abgekürzten geraden Kegels; dieser Kegelmantel ist an Inhalt einem Cylindermantel gleich, der zur Höhe die Höhe des abgekürzten Kegels (DE) und zum Radius den Abstand der Sehne vom Mittelpunkte (CF) hat.

Beweis. Nach §. 131 ist der von der Sehne AB beschriebene abgekürzte Kegelmantel M = (AD + BE) . π . AB.

Wenn man nun AB in F halbirt und FG ‖ EB zieht, so ist (nach §. 109 der Planimetrie) $AD + BE = 2FG$, also

$$M = 2FG \cdot \pi \cdot AB.$$

Verbindet man ferner noch F mit C und zieht $FH \perp EB$, so ist $\triangle HFB \sim GFC$, weil Winkel $FHB = FGC = 90^0$ und Winkel $HFB = GFC$ ist, indem beide den Winkel CFH zum Rechten ergänzen. Demnach verhält sich:

$$FB : FH = FC : FG,$$

oder da FB und FH die Hälften von AB und DE sind:

$$AB : DE = FC : FG,$$

woraus

$$AB \cdot FG = DE : FC$$

folgt. Hiernach verwandelt sich der obige Ausdruck für M in

$$M = 2DE \cdot FC \cdot \pi.$$

Dieser Ausdruck kann aber (nach §. 127) für den Inhalt eines Cylindermantels mit der Höhe DE und dem Radius FC gelten.

Dieß findet auch dann noch statt, wenn ein Endpunkt der Sehne in den einen Endpunkt des Durchmessers fällt, oder wenn die Sehne dem Durchmesser parallel ist. Im ersten Falle beschreibt die Sehne einen vollständigen Kegelmantel; der vorhergehende Beweis kann aber ohne alle weitere Veränderung, als daß die Punkte A und D jetzt in einen zusammenfallen, beibehalten werden. Im letzten Falle wird durch die Bewegung der Sehne unmittelbar der angegebene Cylindermantel erzeugt.

§. 142. Lehrsatz.

Die Kugeloberfläche ist einem Cylindermantel gleich, welcher den Umfang der Kugel zum Umfange und den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat.

Beweis. Theilt man die halbe Peripherie eines Hauptkreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, verbindet die auf einander folgenden Theilungspunkte (Fig. 66) und bezeichnet den Abstand der entstandenen Sehnen vom Mittelpunkte mit ϱ, so hat man für die von diesen Sehnen AB, BD, DE, EF und FG bei der Umdrehung um AG beschriebenen krummen Flächen nach der Reihe die Ausdrücke:

$$2Ab \cdot \varrho\pi, \quad 2bd \cdot \varrho\pi, \quad 2de \cdot \varrho\pi, \quad 2ef \cdot \varrho\pi, \quad 2fG \cdot \varrho\pi$$

also für die Summe aller:

$$S = 2\varrho\pi\,(Ab + bd + de + ef + fG)$$

oder

$$S = 2\varrho\pi \cdot AG = 2\varrho\pi \cdot 2r,$$

wenn man den Durchmesser der Kugel $AG = 2r$ setzt.

Nun wird man offenbar — dadurch, daß man die Peripherie des Halbkreises in mehr und mehr gleiche Theile theilt, — den Abstand ϱ der Sehne vom Mittelpunkte dem Radius r, die von den Sehnen gebildete gebrochene Linie der halben Peripherie und die Summe der krummen Flächen, welche die einzelnen Sehnen beschreiben, der Kugelfläche immer näher und beliebig nahe bringen können, und es wird folglich der Inhalt der Kugeloberfläche O erhalten werden, wenn man in dem obigen Ausdrucke für S an die Stelle von ϱ den Radius r setzt. Dann ergibt sich

$$O = 2r\pi \cdot 2r,$$

ein Ausdruck, welcher (nach §. 127) für den Inhalt eines Cylindermantels gelten kann, der den Umfang der Kugel $2r\pi$ zum Umfange und den Durchmesser 2r zur Höhe hat.

§. 143. Zusatz.

Die Formel des vorhergehenden §.:

$$O = 2r\pi \,.\, 2r = 4r^2\pi$$

läßt sich auch dahin aussprechen: die Kugeloberfläche ist viermal so groß, als ein Hauptkreis; — denn der Inhalt des Hauptkreises, der natürlich zum Radius r hat, ist bekanntlich $r^2\pi$ (§. 221 der Planimetrie). — Bei einer Halbkugel ist daher die krumme Fläche gerade das Doppelte von der ebenen.

Anm. Ist z. B. $r = 6''$ gegeben, so ist näherungsweise

$$O = 4 \,.\, 36 \,.\, 3^1/_7 = 452^4/_7 \square''.$$

§. 144. Erklärung.

Ein Stück der Kugelfläche, welches von der Peripherie eines Kugelkreises begrenzt wird, heißt eine Calotte (Haube), und ein Stück der Kugelfläche, welches zwischen zwei parallelen Kugelkreisen liegt, heißt eine Zone (Gürtel).

§. 145. Zusatz.

Die Calotte oder Zone ist einem Cylindermantel gleich, welcher den Umfang der Kugel zum Umfange und die Höhe der Calotte oder Zone zur Höhe hat.

Der Beweis ist dem von §. 141 ganz ähnlich. Man wird sich nehmlich den Bogen, durch dessen Umdrehung die Calotte oder Zone beschrieben werden kann, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt und die auf einander folgenden Theilungspunkte durch Sehnen verbunden denken u. s. f.

§. 146. Zusatz.

Ist r der Radius der Kugel, h die Höhe der Calotte oder Zone, so ist ihr Flächeninhalt $= 2r\pi \,.\, h$.

Beweis. Denn $2r\pi$ ist der Umfang und h die Höhe des der Calotte oder Zone gleichen Cylindermantels.

Anm. Auch die folgende Beziehung ist merkenswerth. Die von dem Bogen AB (Fig. 66) beschriebene Calotte ist nach dem vorhergehenden §. $= AG \,.\, \pi \; Ab = AG \,.\, Ab \,.\, \pi = AB^2 \,.\, \pi$, d. h. die Calotte ist einem Kreise gleich, welcher die Sehne AB zum Radius hat. So ist insbesondere die halbe Kugelfläche einem Kreise gleich, der zum Radius die Sehne eines Bogens von 90^0 hat, und die ganze Kugelfläche einem Kreise gleich, der den Kugeldurchmesser zum Radius hat.

Bemerkung. Wir wenden uns nun zu der Aufgabe, den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks oder Vielecks zu berechnen. Ehe wir jedoch zur Auflösung dieser Aufgabe übergehen, haben wir noch den folgenden Lehrsatz vorauszuschicken.

*§. 147. Lehrsatz.

Symmetrische sphärische Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt.

Beweis 1. Es läßt sich kein Grund angeben, warum das eine größer sein sollte, als das andere.

Beweis 2. Die gegebenen Dreiecke seien ABC und abc (Fig. 63); — man bilde das zu ABC gehörige körperliche Dreieck am Mittelpunkte M und verlängere die Kanten desselben, bis sie die Oberfläche der Kugel zum zweiten Male in den Punkten α, β, γ treffen. Dann bestimmen diese drei Punkte ein neues sphärisches Dreieck $\alpha\beta\gamma$, welches dem Dreiecke abc congruent

ist. Man denke sich ferner durch die drei Punkte A, B, C eine Ebene gelegt und in dieser durch die genannten drei Punkte eine Kreislinie gezogen. Sind nun P und π die Pole dieses Kugelkreises, und wird P mit den Punkten A, B, C, π mit α, β, γ durch Bogen von Hauptkreisen verbunden, so sind zunächst (nach §. 140), 3) die Bogen PA, PB, PC einander gleich; ferner ist aber auch $PA = \pi\alpha$, $PB = \pi\beta$, $PC = \pi\gamma$, da die zugehörigen Centriwinkel bei M Scheitelwinkel sind. Demnach ist auch $\pi\alpha = \pi\beta = \pi\gamma$. Nun stimmen die beiden Dreiecke APB und $\alpha\beta\pi$ in allen Seiten und Winkeln überein, — denn die zugehörigen körperlichen Dreiecke sind Scheiteldreiecke, — und da die Dreiecke ABP und $\alpha\beta\pi$ zugleich gleichschenkelig sind, so sind sie auch congruent. — Aus denselben Gründen ist $\triangle\, ACP \cong \alpha\gamma\pi$ und $\triangle\, BCP \cong \beta\gamma\pi$, folglich auch $\triangle\, ABC = \alpha\beta\gamma = abc$.

In der Figur sind die Punkte P und π innerhalb der Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$ verzeichnet; man sieht indeß äußerst leicht, daß der Beweis sich nicht wesentlich ändert, wenn jene Punkte in eine Seite oder außerhalb der Dreiecke fallen. Im letztern Fall würde man von der Summe zweier gleichschenkeligen Dreiecke das dritte (oder dieses von jener Summe) subtrahiren.

*§. 148. Lehrsatz.

Jedes sphärische Dreieck verhält sich zur halben Kugeloberfläche, wie der Ueberschuß seiner Winkelsumme über 180^0 sich zu 360^0 verhält.

B e w e i s. Die Winkel des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 64) seien in Graden ausgedrückt durch $\alpha (= A)$, $\beta (= B)$, $\gamma (= C)$, die Fläche des Dreiecks selbst sei mit a und die halbe Kugelfläche mit O bezeichnet. Da sich nun ein sphärisches Zweieck zur halben Kugelfläche offenbar wie die Zahl seiner Grade zu 180 verhält, so ist

$$a + b : O = \beta : 180$$

und

$$a + c : O = \alpha : 180.$$

Ferner ist aber auch:

$$a + d : O = \gamma : 180;$$

denn das Dreieck d ist seinem Scheiteldreieck gleich, und dieses bildet mit a ein sphärisches Zweieck, für welches γ die Zahl der Grade bezeichnet. Aus den obigen Proportionen folgt:

$$a + b = \frac{\beta}{180} \cdot O,$$

$$a + c = \frac{\alpha}{180} \cdot O,$$

$$a + d = \frac{\gamma}{180} \cdot O,$$

und hieraus durch Addition:

$$3a + b + c + d = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{180} \cdot O,$$

oder da $a + b + c + d = O$ ist:

$$2a + O = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{180} \cdot O,$$

also, wenn man beiderseits $O = \frac{180}{180} \cdot O$ subtrahirt:

$$2a = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{180} \cdot O$$

und
$$a = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{360} \cdot O$$

oder
$$a : O = (\alpha+\beta+\gamma-180) : 360.$$

***§. 149. Zusatz.**

Man sieht nun auch leicht ein, wie das Verhältniß der Fläche eines beliebigen sphärischen Vielecks zur halben Kugelfläche durch seine Winkelsumme bestimmt wird. Hat das Vieleck V, dessen Winkelsumme S sein mag, n Seiten, so läßt sich dasselbe durch Diagonalen aus einer Ecke nach den übrigen Ecken gezogen in n — 2 Dreiecke theilen. Diese seien A, B, C . . . . L und ihre Winkelsummen beziehlich α, β, γ . . . λ. Dann ist nach dem vorhergehenden §.

$$A = \frac{\alpha-180}{360} \cdot O,$$

$$B = \frac{\beta-180}{360} \cdot O,$$

$$C = \frac{\gamma-180}{360} \cdot O,$$

. . . .

. . . .

$$L = \frac{\lambda-180}{360} \cdot O,$$

folglich

$$(A+B+C) \ldots +L = \frac{(\alpha+\beta+\gamma \ldots +\lambda)-(n-2) \cdot 180}{360} \cdot O,$$

oder da $A+B+C \ldots +L = V$ und $\alpha+\beta+\gamma \ldots +\lambda = S$ ist:

$$V = \frac{S-(n-2)\ 180}{360} \cdot O.$$

Siebenter Abschnitt.

Von der Ausmessung der eckigen und runden Körper.

A. Prisma und Cylinder.

§. 150. Erklärung.

Zwei Körper heißen congruent, wenn sie sich so zusammen legen lassen, daß ihre Grenzen sich decken.

Zwei Körper werden gleich genannt, wenn sie sich in die nehmlichen congruenten Stücke zerschneiden lassen, also auch, wenn in beiden der nehmliche dritte Körper gleich vielmal enthalten ist.

Bemerkung. Wenn wir die Sätze über die Congruenz der Körper, ins Besondere der Pyramiden und Prismen, gänzlich übergehen, so geschieht dieß deshalb, weil diese Sätze eine weit geringere Anwendung finden und überdieß größere Schwierigkeiten darbieten, als die analogen Sätze der Planimetrie über die Congruenz der Dreiecke, Vierecke u. s. w.

Wir sind in der Planimetrie bei der Vergleichung der Figuren in Hinsicht der Größe vom Parallelogramme ausgegangen und haben zuerst zwei Parallelogramme, mit gleicher Höhe und gleicher Grundlinie oder, da gleiche Linien auch congruent sind, mit gleicher Höhe und congruenter Grundlinie mit einander verglichen. Wir beginnen dem gemäß in der Stereometrie die Vergleichung der Körper in Hinsicht ihrer Größe mit dem folgenden Satze, bei welchem sich indeß eine größere Mannigfaltigkeit der verschiedenen Fälle, als bei dem analogen Satze der Planimetrie deßhalb herausstellt, weil in der Stereometrie, nicht wie dort bloß zwei Dimensionen, sondern alle drei Dimensionen des Raumes zugleich zu berücksichtigen sind.

§. 151. Lehrsatz.

Parallelepipeda mit congruenter Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich.

Beweis. Man lege die gegebenen Parallelepipeda so zusammen, daß ihre congruenten Grundflächen sich decken; dann werden auch die gegenüberliegenden Grundflächen nach d. Vorauss. in eine Ebene fallen. — Nun sind zwei Fälle möglich: entweder diese beiden Grundflächen EFGH und KLMN liegen zwischen den nehmlichen Parallelen EL und HM, wie dieses z. B. bei den Parallelepipeden ABCDEFGH und ABCDKLMN (Fig. 67) der Fall ist, oder diese Bedingung ist nicht erfüllt (Fig. 68).

Im ersten Falle (Fig. 67) entstehen zwei dreiseitige Prismen AEKDHN und BFLCGM, welche congruent sind. Denn wenn man diese beiden Körper so zusammenlegt, daß die Seitenfläche BCGF auf die ihr congruente Seiten- ADHE *) fällt, so wird das Dreieck BFL das congruente Dreieck AEK und das Dreieck CGM das congruente Dreieck DHN decken, weil diese Dreiecke gegen die auf einander gelegten Flächen BCGF und ADHE an der nehmlichen Seite dieselbe Neigung haben. Es fällt daher auch die Seitenfläche BCML auf ADNK und FLMG auf EKNH; folglich sind die dreiseitigen Prismen AEKDHN und BFLCGM congruent. — Subtrahiren wir nun zunächst das dreiseitige Prisma BFLCGM von dem ganzen vierseitigen Prisma ABLEDCMH, so bleibt das Parallelepipedum ABCDEFGH übrig, und wenn wir von demselben vierseitigen Prisma das dreiseitige Prisma AEKDHN wegnehmen, so bleibt das Parallelepipedum ABCDKLMN übrig. Demnach ist Parallelepipedum ABCDEFGH = ABCDKLMN.

Wenn aber zweitens in den Parallelepipeden ABCDEFGH und ABCDKLMN (Fig. 68), welche die gemeinschaftliche Grundfläche ABCD und eine gleiche Höhe haben, die oberen Grundflächen EFGH und KLMN nicht zwischen denselben Parallelen liegen, so läßt sich durch Erweiterung der Seitenflächen ein neues Parallelepipedum ABCDOPQR bilden, welches mit jedem der gegebenen nach Nro. 1 sich vergleichen läßt. Man erhält dieses Parallelepipedum, wenn man in dem einen gegebenen Parallelepipedum ABCDEFGH die Seitenflächen

*) Die gegenüberstehenden Seitenflächen eines Parallelepipedums ABCDEFGH sind nach §. 115 congruent.

ADHE und BCGF, welche durch ein Paar gegenüberstehende Grundkanten AD und BC gehen, und in dem andern gegebenen Parallelepipedum ABCDKLMN die Seitenflächen ABLK und DCMN, welche durch das andere Paar Grundkanten AB und CD gehen, bis zum Zusammentreffen erweitert. Das so entstandene Parallelepipedum ABCDOPQR ist zu Folge des in Nro. 1 geführten Beweises dem gegebenen Parallelepipedum ABCDEFGH gleich, da es mit demselben eine gemeinschaftliche Grundfläche ABCD und gleiche Höhe hat und die beiden oberen Grundflächen EFGH und OPQR zwischen den nehmlichen Parallelen HO und GP liegen. Eben so ist das Parallelepipedum ABCDOPQR dem gegebenen Parallelepipedum ABCDKLMN nach Nro. 1 gleich, da es mit demselben eine gemeinschaftliche Grundfläche ABCD und gleiche Höhe hat und die beiden oberen Grundflächen KLMN und OPQR zwischen denselben Parallelen LO und MR liegen. Da nun hiernach das Parallelepipedum ABCDOPQR jedem der gegebenen gleich ist, so müssen diese auch unter sich gleich sein. Folglich ist Parallelepipedum ABCDEFGH = ABCDKLMN, w. z. e. w.

Bemerkung. So wie sich in der Planimetrie aus der Vergleichung der Parallelogramme auch die der Dreiecke mit Hilfe des Satzes ergeben hat, daß das Parallelogramm durch die Diagonale halbirt wird, so bedürfen wir in der Stereometrie, um von dem Parallelepipedum zum Prisma und zwar zunächst zum dreiseitigen überzugehen, des folgenden Satzes.

§. 152. Lehrsatz.

Das Parallelepipedum wird durch die Diagonalebene halbirt.

Beweis. Ist erstens ein gerades Parallelepipedum ABCDEFGH (Fig. 69) gegeben, so sind die beiden dreiseitigen Prismen ABCEFG und CDAGHE, in welche das Parallelepipedum durch die Diagonalebene AEGC zerschnitten wird, offenbar congruent.

Wenn aber zweitens das gegebene Parallelepipedum ABCDEFGH (Fig. 70) schief ist, so stimmen zwar die Prismen ABCEFG und CDAGHE in den Seitenflächen und Grundflächen, so wie auch in den Neigungswinkeln derselben gegen einander überein; dennoch würde man sich vergeblich bemühen, dieselben zum Decken zu bringen *). Um nun zu zeigen, daß sie eine gleiche Größe haben, verwandeln wir dieselben in gleich große gerade Prismen, indem wir in einer Seitenkante AE einen beliebigen Punkt K annehmen und durch diesen eine senkrechte Ebene legen, welche die Seitenflächen des gegebenen Parallelepipedums ABCDEFGH in dem Parallelogramme KLMN durchschneidet, hierauf AE so weit verlängern, bis KO = AE wird, und durch O ebenfalls eine senkrechte Ebene legen, welche die erweiterten Seitenflächen in dem Parallelogramme OPQR durchschneidet. Durch diese Construction entsteht ein gerades Parallelepipedum KLMNOPQR und zwei gerade Prismen KLMOPQ und MNKQRO.

Nun ist zunächst das schiefe Prisma ABCEFG gleich dem geraden KLMOPQ. Denn sie haben das Stück KLMEFG gemeinschaftlich, und die nicht gemeinschaftlichen Stücke ABCKLM und EFGOPQ sind congruent. Da nehmlich AE = KO gemacht und deßhalb auch BF = LP und CG = MQ ist, so muß offenbar auch AK = EO, BL = EP und CM = GQ sein. Legen wir nun

---

*) Den besondern Fall ausgenommen, daß die Kanten AB und BC und die an denselben liegenden Flächenwinkel gleich sind.

den Körper EFGOPQ so auf ABCKLM, daß die beiden Grundflächen OPQ und KLM, welche nach §. 111 congruent sind, sich decken, so fällt auch die Seitenkante EO auf AK, FP auf BL und GQ auf CM, weil diese Linien auf den zusammengelegten Grundflächen nach der Construction senkrecht stehen, und da diese Linien überdieß eine gleiche Länge haben, so fällt auch der Endpunkt E auf A, F auf B und G auf C, also auch die Grundfläche EFG auf ABC. Demnach ist der Körper ABCKLM $\cong$ EFGOPQ. Addiren wir nun zu beiden den Körper KLMEFG, so ergiebt sich das schiefe Prisma ABCEFG gleich dem geraden KLMOPQ.

Eben so finden wir, daß das schiefe Prisma CDAGHE gleich dem geraden Prisma MNKQRO ist.

Nun wird aber nach Nro. 1 das gerade Parallelepipedum KLMNOPQR durch die Diagonalebene KOQM halbirt; also ist das gerade Prisma KLMOPQ gleich dem geraden Prisma MNKQRO, und folglich ist auch das schiefe Prisma ABCEFG gleich dem schiefen Prisma CDAGHE.

Anm. Dergleichen Körper, wie die eben genannten schiefen Prismen, welche von lauter congruenten und gegen einander gleich geneigten Grenzflächen eingeschlossen werden, und dennoch selbst nicht congruent sind, heißen *symmetrische Körper*.

§. 153. Lehrsatz.

Prismen mit *congruenter* Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich.

Beweis. Es seien *zuerst* zwei dreiseitige Prismen ABCDEF und GHKLMN (Fig. 71) gegeben; man lege durch zwei Seitenkanten AD und CF des ersteren und durch die gleichliegenden Seitenkanten GL und KN des anderen Ebenen, welche den gegenüberstehenden Seitenflächen parallel sind, so entstehen die beiden Parallelepipeda ABCODEFP und GHKQLMNR, welche nach §. 151 einander gleich sind, weil sie gleiche Höhe und congruente Grundfläche haben. Da nun die Parallelepipeda nach §. 152 durch die Diagonalebene ADFC und GLNK halbirt sind, so ist folglich auch Prisma ABCDEF = GHKLMN.

Wenn aber *zweitens* zwei mehrseitige Prismen gegeben sind, so lassen sich dieselben in dreiseitige Prismen mit gleicher Höhe und congruenter Grundfläche zerschneiden, welche nach Nro. 1 einander gleich sind; folglich müssen auch die gegebenen mehrseitigen Prismen einander gleich sein.

§. 154. Lehrsatz.

Prismen mit gleicher Höhe und *gleicher* Grundfläche sind gleich.

Beweis. Wenn zwei ebene Figuren einander gleich sind, so müssen sich dieselben in congruente Stücke zerschneiden lassen. Legt man nun durch die Theilungslinien Ebenen mit den Seitenkanten parallel, so werden die gegebenen Prismen selbst in kleinere Prismen zerschnitten, welche gleiche Höhe und congruente Grundfläche haben und folglich nach dem vorhergehenden §. gleich sind. Folglich müssen auch die gegebenen Prismen selbst einander gleich sein.

Anm. Der vorstehende Beweis könnte vielleicht beim ersten Anblicke als nicht ganz gründlich geführt erscheinen, da man sich allerdings zwei Figuren denken kann, welche einander gleich sind, ohne daß es möglich ist, dieselben *wirklich* in congruente Stücke zu zerschneiden. Allein wenn wir uns fragen, was wir eigentlich unter gleichen Figuren verstehen, so werden wir hierauf keine andere, als die zweifache Antwort geben können, entweder: solche, in welchen ein und dieselbe Figur gleich vielmal enthalten ist, oder:

solche, welche sich in die nehmlichen congruenten Stücke zerschneiden lassen, — wo die letztere Antwort die erstere, als einen besonderen Fall, mit in sich schließt. Wenn wir daher zwei Figuren als gleich annehmen, so denken wir uns dieselben als aus congruenten Stücken bestehend, wonach der obige Beweis, was die Gründlichkeit anlangt, als vollkommen gerechtfertigt erscheint.

Das Nehmliche geht auch aus der folgenden Ueberlegung hervor: — Da wir in der Mathematik nur nach Gründen schließen, welche in schon früher als richtig erkannten Wahrheiten enthalten sind, so muß es möglich sein, die Gleichheit der Grundflächen zweier Prismen aus den in dem Lehrbuche enthaltenen Sätzen der Planimetrie zu erweisen; entgegengesetzten Falles könnte diese Gleichheit wenigstens für uns hier, indem wir die Stereometrie nach diesem Lehrbuche behandeln, keine Gültigkeit haben. Nun sind aber sämmtliche Sätze über die Gleichheit der ebenen Figuren in der Art erwiesen, daß, wenn wir bis auf die letzten Gründe zurückgehen, aus denen die Gleichheit folgte, die zu vergleichenden Figuren entweder wirklich in congruente Stücke zerschnitten wurden oder sich als Summen oder Differenzen congruenter Figuren ergaben. — Denken wir uns nun durch die für diese Beweise erforderlichen Hilfslinien Ebenen parallel mit den Seitenkanten derjenigen Prismen gelegt, welche jene Figuren zu Grundflächen haben, so werden dieselben Gründe, welche uns von der Gleichheit der Grundflächen überzeugt haben, sich auch auf die durch diese Construction entstandenen Prismen vermöge §. 153 übertragen lassen, woraus denn mit Nothwendigkeit folgt, daß Prismen mit gleichen Höhen und gleichen Grundflächen einander gleich sind.

§. 155. Lehrsatz.

Prismen mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis. Da nach §. 154 schiefe Prismen sich durch gerade Prismen mit gleicher Höhe und Grundfläche ersetzen lassen, so wollen wir um größerer Einfachheit der Figur Willen zwei gerade Prismen P und Q (Fig. 72) als gegebene annehmen. In diesen sei also $ABC = EFGH$, und es verhalte sich

$$AD : EK = 3 : 5.$$

Theilt man nun AD in drei und EK in fünf gleiche Theile und legt durch die Theilungspunkte Ebenen den Grundflächen parallel, so wird das Prisma P in drei und Q in fünf Theile getheilt, welche (nach §. 154) alle einander gleich sind. Demnach verhält sich auch

$$P : Q = 3 : 5 = AD : EK.$$

Anm. Vergl. die Anm. zu §. 89.

Bemerkung. Da nach §. 154 Prismen mit gleicher Höhe und Grundfläche gleich sind und jede gradlinige Figur (nach der Planimetrie) sich in ein Rechteck verwandeln läßt, so kann jedes Prisma in ein rechtwinkliges Parallelepipedum verwandelt werden. Wir werden daher zur Ausmessung der Prismen überhaupt gelangen, wenn wir im Stande sind, das rechtwinklige Parallelepipedum auszumessen.

§. 156. Erklärung.

Wenn man einen Körper durch einen andern, als Einheit angenommenen Körper gemessen hat und dann den auszumessenden Körper (seiner Größe nach) als benannte Zahl ausdrückt, so heißt diese benannte Zahl der Inhalt des Körpers. — Als Einheit wird gewöhnlich ein Würfel angenommen.

Wenn im Folgenden aus den Maaßzahlen gewisser gegebenen Linien oder Flächen der Inhalt eines Körpers berechnet werden soll, so ist allemal vor-

ausgesetzt, daß die Linien durch die Kante des Würfels als Längeneinheit und die Flächen durch die Seitenfläche des Würfels als Flächeneinheit gemessen sind, und daß sich also die gegebenen Maaßzahlen auf diese Einheiten beziehen.

Anm. Zu den am häufigsten Anwendung findenden Körpermaaßen gehören folgende:

1 Kubikfuß = 1728 Kubikzoll.

1 Kubikzoll = 1728 Kubiklinien.

1 Kubikklafter = 108 Kubikfuß, (ein Körper von 6′ Höhe, 6′ Länge und 3′ Breite).

1 Schachtruthe = 144 Kubikfuß, (ein Körper von 12′ Länge, 12′ Breite und 1′ Höhe).

1 Scheffel = $^{16}/_{9}$ Kubikfuß = 3072 Kubikzoll.

1 Metze = $^{1}/_{16}$ Scheffel = $^{1}/_{9}$ Kubikfuß = 192 Kubikzoll.

1 Quart oder Kanne = $^{1}/_{3}$ Metze = $^{1}/_{27}$ Kubikfuß = 64 Kubikzoll (= einem Würfel von 4 Zoll Höhe).

§. 157. Lehrsatz.

Die Zahl für den Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums wird gefunden, wenn man die Maaßzahlen dreier in einen Punkt zusammenstoßenden Kanten — (Länge, Breite und Höhe) — in einander multiplicirt.

Beweis. Das auszumessende Parallelepipedum sei P (Fig. 73), der als Einheit angenommene Würfel W; die Maaßzahlen dreier zusammenstoßenden Kanten des Parallelepipedums AB, AC, AD seien beziehlich a, b, c; man mache AF = AG = AH = der Seite des Würfels und lege durch F eine der Grundfläche CD, durch G eine der Seitenfläche BD und durch H eine der Seitenfläche BC parallele Ebene; dann entstehen drei neue Parallelepipeda AL, AM und AN. — Nun haben die Parallelepipeda AE und AL dieselbe Grundfläche ADOC; sie verhalten sich daher (vermöge §. 155) wie ihre Höhen; also ist

$$1)\quad AE : AL = AB : AF = a : 1.$$

Die Parallelepipeda AL und AM haben ebenfalls eine Fläche ADQF gemeinschaftlich, und wenn man diese als Grundfläche annimmt, sind die zugehörigen Höhen AC und AG; es verhält sich folglich

$$2)\quad AL : AM = AC : AG = b : 1.$$

Endlich kann man AGRF als gemeinschaftliche Grundfläche der Parallelepipeda AM und AN und AD und AH als die zugehörigen Höhen ansehen; dann erhält man die Proportion

$$3)\quad AM : AN = AD : AH = c : 1.$$

Aus den drei vorhergehenden Gleichungen folgt nach der Reihe:

$$1)\quad AE = a . AL,$$
$$2)\quad AL = b . AM,$$
$$3)\quad AM = c . AN,$$

woraus offenbar $AE = a . b . c . AN$

hervorgeht, oder was dasselbe ist: $P = a . b . c . W$,

d. h. der Würfel ist in dem Parallelepipedum a . b . cmal enthalten, und wenn man die Zahl für den Inhalt des Parallelepipedums mit J bezeichnet, so ist folglich $J = a . b . c.$

Anm. Ist a = 5, b = 3, c = 4, so ist:

$$AE = 5AL,$$
$$AL = 3AM,$$

und $AM = 4AN$,
folglich $AE = 5 \cdot 3 \cdot 4AN = 60AN$,
also ist die Zahl des Inhalts $J = 60$.

Bemerkung. Den vorhergehenden Satz spricht man gewöhnlich kurz so aus: „Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums ist gleich dem Product dreier zusammenstoßenden Kanten." — Aehnlicher Abkürzungen wird man sich auch in den folgenden Sätzen bedienen.

Da der so eben erwiesene Satz die Grundlage für die Lehre von der Ausmessung der Körper überhaupt bildet, so wollen wir hier noch diejenigen Sätze, welche uns zu diesem Ergebnisse geführt haben, nach ihrer Reihenfolge übersichtlich zusammenstellen.

So wie wir bei der Vergleichung des Inhalts ebener Figuren in der Planimetrie zuerst zeigten, daß Parallelogramme mit gleicher Höhe und Grundlinie gleich sind, so stellten wir in der Stereometrie zuerst den Satz auf:

1) Parallelepipeda mit gleicher Höhe und congruenter Grundfläche sind gleich.

Der Beweis dieses Satzes bot darum größere Schwierigkeit, als der Beweis des analogen Satzes in der Planimetrie dar, weil die Grundflächen, welche den zum Decken gebrachten Grundflächen gegenüberliegen, entweder zwischen denselben Parallelen liegen oder dieses nicht thun. — Wir schalteten dann den Hülfssatz ein:

2) Das Parallelepipedum wird durch die Diagonalebene halbirt.

Auch hier war der Beweis schwieriger zu führen, als bei dem verwandten Satze der Planimetrie, indem die beiden dreiseitigen Prismen, in welche das Parallelepipedum durch die Diagonalebene getheilt wird, nicht allemal zum Decken gebracht werden können, sondern in der Regel nur symmetrisch sind. Mit Hülfe dieses Satzes ließ sich aber weiter zeigen, daß

3) Prismen mit gleicher Höhe und congruenter Grundfläche gleich sind,

indem zunächst dreiseitige Prismen sich als die Hälften gleicher Parallelepipeda darstellen lassen, und mehrseitige Prismen in dreiseitige zerschnitten werden können.

Bis hierher waren nur Parallelepipeda oder Prismen mit congruenten Grundflächen verglichen worden. Weil wir aber zwei Figuren gleich nennen, wenn sie aus congruenten Stücken bestehen, oder doch hieraus bestehend gedacht werden können, so ergab sich auch sofort aus dem vorhergehenden Satze die Richtigkeit des folgenden allgemeineren Satzes:

4) Zwei Prismen mit gleicher Höhe und gleicher Grundfläche sind gleich.

Denn da die gleichen Grundflächen sich in congruente Stücke zerschneiden lassen, so können die beiden Körper selbst in Prismen, welche gleiche Höhen und congruente Grundflächen haben, also nach Nro. 3 gleich sind, zertheilt werden. Es folgte nun weiter der Satz:

5) Prismen mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen,

welcher eben so erwiesen wurde, wie der verwandte Satz in der Planimetrie, daß sich Rechtecke mit gleicher Höhe wie ihre Grundlinien verhalten. — Mit Hülfe dieses Satzes wurden wir endlich in den Stand gesetzt, den Hauptsatz:

6) Der Inhalt des rechtwinkligen Parallelepipedums ist gleich dem Producte dreier zusammenstoßenden Kanten,

in ganz ähnlicher Art, wie den Satz über die Ausmessung des Rechtecks in der Planimetrie zu erweisen.

§. 158. Zusatz.

Der Inhalt eines Würfels, welcher die Kante a hat, ist

$$J = a \,.\, a \,.\, a = a^3.$$

Anm. Diese Beziehung ist Veranlassung geworden, eine jede dritte Potenz einen Kubus zu nennen. Es drückt nehmlich, wie man so eben gesehen hat, die dritte Potenz einer Zahl den Inhalt eines Würfels aus, dessen Seite die gegebene Zahl zur Maaßzahl hat.

§. 159. Zusatz.

1) Nach §. 157 ist der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums $J = a \,.\, b \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$, und da $b \,.\, c$ offenbar den Inhalt der Grundfläche ausdrückt, so kann man auch jenen Satz dahin aussprechen: der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums ist gleich dem Producte aus Höhe und Grundfläche. — Hieraus folgt:

2) Der Inhalt eines jeden Prisma's ist gleich dem Producte aus Höhe und Grundfläche.

Denn jedes Prisma ist (nach §. 154) einem rechtwinkligen Parallelepipedum gleich, das mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat, und für das rechtwinklige Parallelepipedum ist der Satz so eben erwiesen.

Anm. Ist z. B. von einem Prisma der Inhalt der Grundfläche $= 145 \square'$ und die Höhe $= 9'$ gegeben, so ist der körperliche Inhalt des Prisma's

$$= 9 \,.\, 145 = 1305 \text{ Kubikfuß.}$$

§. 160. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden §. folgt:

1) Zwei Prismen sind gleich, wenn bei ihnen die Producte aus Höhe und Grundfläche gleich sind, oder, was dasselbe sagen will, wenn sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten.

2) Zwei Prismen verhalten sich zu einander wie die Producte aus Höhe und Grundfläche.

§. 161. Lehrsatz.

Der Inhalt eines Cylinders ist dem Producte aus Höhe und Grundfläche gleich.

Beweis. Der Cylinder kann als ein Prisma von unendlich vielen Seiten angesehen werden; und von Prismen gilt der Satz nach §. 159.

§. 162. Aufgabe.

Aus der Höhe h und dem Radius r der Grundfläche den Inhalt J des Cylinders zu berechnen.

Aufl. Der Inhalt der Grundfläche ist (nach §. 221 der Planimetrie) $= r^2\pi$; multiplicirt man diesen Ausdruck mit der Höhe h, so ergibt sich der gesuchte Inhalt $J = r^2\pi h.$

Anm. Wenn z. B. $r = 3'$, $h = 5'$ gegeben ist und wir statt π den Näherungswerth $3^1/_7$ setzen, so ist

$$J = 9 \,.\, 5 \,.\, 3^1/_7 = 141^3/_7 \text{ (Kubikfuß).}$$

B. Pyramide und Kegel.

*§. 163. Lehrsatz.

Die abgekürzte Pyramide ist kleiner als ein Prisma, das mit ihr gleiche Höhe und die größere ihrer Grundflächen zur Grundfläche hat, und größer als ein Prisma, das dieselbe Höhe und die kleinere Grundfläche hat.

Beweis. Die abgekürzte Pyramide sei ABCDEF (Fig. 74); — zieht man in den Ebenen der Seitenflächen BADE und BCFE die Linien DG und FH || BE und legt durch diese Parallelen eine Ebene, welche die erweiterte obere Grundfläche in GH schneidet, so ist offenbar die abgekürzte Pyramide ein Theil des entstandenen Prisma's GHBDFE. Wenn man dagegen AL und CM || BE zieht und durch diese Parallelen eine Ebene legt, so ist das Prisma ABCLEM nur ein Theil der abgekürzten Pyramide ABCDEF.

In der Figur ist eine dreiseitige Pyramide dargestellt; der Satz läßt sich aber auf ähnliche Art auch für mehrseitige Pyramiden darthun; er folgt indeß auch aus dem so eben von der dreiseitigen Pyramide Erwiesenen, da sich mehrseitige Pyramiden und Prismen durch Diagonalebenen in dreiseitige zerschneiden lassen.

§. 164. Lehrsatz.

Pyramiden mit gleicher Höhe und Grundfläche sind gleich.

Beweis 1. Wenn man beide Pyramiden (Fig. 75) in einem gleichen Abstande von der Spitze, der mit k bezeichnet sein mag, durchschneidet, so sind die Durchschnitte gleich. Denn nach §. 119 verhalten sich die Durchschnitte, die c und c' heißen mögen, zu den Grundflächen g und g' der ganzen Pyramiden, wie die Quadrate der Abstände von der Spitze; also wenn die gleichen Höhen der ganzen Pyramiden mit h bezeichnet sind:

$$c : g = k^2 : h^2$$

und $$c' : g' = k^2 : h^2,$$

folglich $$c : g = c' : g'.$$

Da aber nach der Annahme $g = g'$ ist, so muß auch $c = c'$ sein. — Da nun beide Pyramiden gleiche Höhe haben, und jedesmal gleiche Durchschnitte entstehen, wo man auch immer die Pyramiden — in gleichem Abstande von der Spitze — durchschneiden mag, so können offenbar die Pyramiden in ihrem Inhalte nicht von einander verschieden sein*).

*Beweis 2. Wenn man die gleichen Höhen der gegebenen Pyramiden in eine beliebige Anzahl, hier z. B. in sieben gleiche Theile theilt und durch die Theilungspunkte Ebenen den Grundflächen parallel legt, so haben die entstandenen Durchschnitte nach dem Obigen in beiden Pyramiden dieselbe Größe und mögen dem zufolge mit einerlei Buchstaben a, b, c, d, e, f und die Grundflächen selbst mit g bezeichnet sein. Ueber diesen Durchschnitten als Grundflächen denke man sich Prismen errichtet, welche sämmtlich $^1/_7$h zur Höhe haben. Diese Prismen seien nach der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \iota$.

*) Dieser Beweis ist zwar nicht ganz streng, aber vollkommen überzeugend. Denn Niemand wird überhaupt an der Gleichheit zweier Körper zweifeln, wenn sie in irgend einer Richtung gleiche Höhe haben und in gleichen Abständen von den Enden dieser Höhen durchschnitten immer gleiche Durchschnitte liefern.

Nun ist nach dem vorhergehenden §. in beiden gegebenen Pyramiden
die oberste abgeschnittene kleine Pyramide .... $< \alpha$,
" zweite " (abgekürzte) Pyramide .... $< \beta$,
" dritte " " " .... $< \gamma$,
....
....
die siebente abgeschnittene (abgekürzte) Pyramide .... $< \eta$.
Demnach ist offenbar sowohl die eine wie die andere ganze Pyramide

$$< \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta.$$

Dagegen ist ebenfalls nach dem vorhergehenden §.
die zweite abgeschnittene (abgekürzte) Pyramide .... $> \alpha$,
" dritte " " " .... $> \beta$,
....
....
die siebente abgeschnittene (abgekürzte) Pyramide .... $> \zeta$,
folglich sind um so mehr die ganzen Pyramiden, (da noch bei jeder die oberste kleine Pyramide hinzu kommt):

$$> \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta.$$

Hiernach sind beide Pyramiden zwischen zwei Grenzen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta$$

und

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta$$

enthalten, welche sich um η von einander unterscheiden, und es müssen folglich die Pyramiden selbst, da sie zwischen jenen Grenzen liegen, um weniger als η von einander verschieden sein. Das Prisma η hat die Grundfläche g und die Höhe $^1/_7$h, also den Inhalt $^1/_7$gh. Bezeichnet man nun die eine Pyramide mit P und die andere mit P′, so ist folglich (abgesehen vom Vorzeichen)

$$P - P' < {}^1/_7 gh.$$

Hätte man die Höhen der Pyramiden nicht gerade in 7, sondern überhaupt in n gleiche Theile getheilt, so würde man — auf ganz gleiche Weise, wie im Vorhergehenden — offenbar

$$P - P' < {}^1/_n gh$$

gefunden haben. Nun kann aber n jede beliebige (ganze) Zahl bezeichnen, und man wird folglich n immer so groß annehmen können, daß das Product $^1/_n$gh kleiner wird, als jede irgend gegebene noch so kleine Zahl; um so mehr muß folglich die Differenz P—P′ kleiner sein, als jede noch so kleine Zahl; kleiner als alle anderen Zahlen ist (abgesehen vom Vorzeichen) allein Null; also muß

$$P - P' = 0,$$

d. h.

$$P = P' \text{ sein.}$$

§. 165. Lehrsatz.

Jedes Prisma ist das Dreifache einer Pyramide, die mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat.

Beweis. Es sei zunächst ein dreiseitiges Prisma ABCDEF (Fig. 76) gegeben; — man zerschneide dasselbe zuerst durch die Ebene BDF in die dreiseitige Pyramide BDEF und die vierseitige Pyramide BADFC (Spitze B, Grundfläche ADFC) und zertheile dann diese Pyramide noch durch die Ebene BDC in zwei dreiseitige Pyramiden BADC und BDFC. Die so eben genannten Pyramiden sind offenbar gleich, da sie gleiche Grundflächen ADC und DFC und gleiche Höhe haben, indem ihre Grundflächen in derselben Ebene

ADFC und ihre Spitzen in demselben Punkte B liegen. Ferner ist auch die Pyramide BADC = BDEF, da sie gleiche Grundflächen ABC und DEF und gleiche Höhe, nehmlich einerlei Höhe mit dem Prisma haben. Da nun alle drei Pyramiden gleich sind, so ist das Prisma das Dreifache von jeder, also z. B. dreimal so groß, als die Pyramide BDEF, welche mit dem Prisma einerlei Höhe und Grundfläche hat.

Das so eben von einem dreiseitigen Prisma und einer dreiseitigen Pyramide Erwiesene gilt aber auch von mehrseitigen — einmal, weil man für mehrseitige Prismen und Pyramiden (nach §. 154 und §. 164) dreiseitige setzen kann, die mit ihnen gleiche Höhe und Grundfläche haben; — ferner auch deshalb, weil sich mehrseitige Prismen und Pyramiden allemal durch Diagonalebenen in dreiseitige zerschneiden lassen.

§. 166. Zusatz.

1) Da die Pyramide der dritte Theil eines Prisma's ist, das mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche hat, so ist ihr Inhalt gleich dem dritten Theile des Productes aus Höhe und Grundfläche.

2) Von Pyramiden gelten daher auch die in §. 160 von Prismen aufgestellten Behauptungen.

Anm. Ist z. B. die Grundfläche einer Pyramide ein Rechteck und die Länge dieses Rechtecks = 6′, die Breite = 4′ und die Höhe der Pyramide = 5′ gegeben, so ist ihr körperlicher Inhalt

$$J = \frac{1}{3} \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 5 = 40 \text{ (Kubikfuß).}$$

§. 167. Lehrsatz.

Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Theile des Productes aus Höhe und Grundfläche.

Beweis. Denn der Kegel ist als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten anzusehen.

§. 168. Aufgabe.

Aus der Höhe h und dem Radius r der Grundfläche eines Kegels den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Der Inhalt der Grundfläche ist $= r^2\pi$, also wenn man mit $^1/_3 h$ multiplicirt, der Inhalt des Kegels

$$J = \frac{1}{3} r^2 \pi h.$$

Anm. Ist z. B. $r = 5''$ und $h = 8''$ gegeben, so ist näherungsweise

$$J = \frac{1}{3} \,.\, 25 \,.\, 8 \,.\, 3\frac{1}{7} = 209\frac{11}{21} \text{ (Kubikzoll).}$$

C. Obelisk und abgekürzter Kegel.

§. 169. Lehrsatz.

Jeder Obelisk ist gleich der Summe aus einem Prisma und einer Pyramide, welche beide mit dem Obelisken gleiche Höhe haben, und von denen das Prisma die mittlere Durchschnittsfigur, die Pyramide aber die Ergänzungsfigur zur Grundfläche hat.

Beweis. 1) Es sei zunächst ein dreiseitiger Obelisk ABCA′B′C′ (Fig. 77) gegeben; — man konstruire die mittlere Durchschnittsfigur $\alpha\beta\gamma$ (§. 123), ziehe durch die Mitte α einer Seitenkante AA′ mit den beiden anderen Seiten-

kanten BB' und CC' die Parallelen DD' und EE' und lege durch dieselben eine Ebene, welche die untere Grundfläche in DE und die erweiterte obere Grundfläche in $D'E'$ schneidet, wodurch die Dreiecke ADE und $A'D'E'$ entstehen, welche nach §. 123 der Ergänzungsfigur des Obelisken gleich sind; — endlich ziehe man noch durch die Mitte einer andern Seitenkante, z. B. durch β, eine Parallele FF' zur dritten Seitenkante CC' *) und lege durch FF' und die ihr Parallele EE' eine Ebene, welche die untere Grundfläche in EF und die erweiterte obere Grundfläche in $E'F'$ durchschneidet. — Das durch diese Construction entstandene Prisma $CEFC'E'F'$ hat mit dem gegebenen Obelisken $ABCA'B'C'$ den kleineren Obelisken $A'B'C'\alpha\beta\gamma$ und das kleinere Prisma $\alpha\beta\gamma EFC$ gemeinschaftlich, enthält aber außerdem noch den prismatischen Körper $\alpha A'E'\beta B'F'$, während dem Obelisken $ABCA'B'C'$ noch der prismatische Körper $\alpha AE\beta BF$ besonders zukommt. Hiernach ist klar, daß sich der gegebene Obelisk $ABCA'B'C'$ von dem Prisma $CEFC'E'F'$ um eben so viel unterscheidet, als der prismatische Körper $\alpha AE\beta BF$ den prismatischen Körper $\alpha A'B'\beta B'F'$ übertrifft. Zur Ermittelung dieses Unterschiedes führt die Vergleichung der beiden dreiseitigen Prismen $\alpha DE\beta BF$ und $\alpha D'E'\beta B'F'$ **), welche einander gleich sind, weil sie gleiche Grundflächen βBF und $\beta B'F'$ (vergl. §. 114 der Planimetrie) und auch gleiche Höhe haben, da sie zwischen den parallelen Ebenen $DED'E'$ und $BFB'F'$ liegen. Da nun das Prisma $\alpha DE\beta BF$ um die Pyramide αADE kleiner, als der prismatische Körper $\alpha AE\beta BF$ ist, aber das gleiche Prisma $\alpha D'E'\beta B'E'$ um die Pyramide $\alpha A'D'E'$ größer, als der prismatische Körper $\alpha A'E'\beta B'F'$ ist, so übertrifft der prismatische Körper $\alpha AE\beta BF$ den prismatischen Körper $\alpha A'E'\beta B'F'$ um die Summe der beiden Pyramiden αADE und $\alpha A'D'E'$, und um eben so viel unterscheidet sich folglich auch, wie wir bereits oben gesehen haben, der gegebene Obelisk $ABCA'B'C'$ von dem Prisma $CEFC'E'F'$.

Demnach ist also der Obelisk $ABCA'B'C'$ gleich der Summe aus dem Prisma $CEFC'E'F'$ und den beiden Pyramiden αADE und $\alpha A'D'E'$.

Da diese Pyramiden beide die halbe Höhe des Obelisken $\frac{1}{2}h$ zur Höhe haben und ihre Grundflächen ADE und $A'D'E'$ einander gleich sind, so werden wir ihre Summe durch eine Pyramide mit der ganzen Höhe h und der Grundfläche ADE ersetzen können. Wenn wir daher das Prisma $CEFC'E'F'$, dessen Höhe gleich der Höhe des Obelisken h und dessen Grundfläche EFC gleich der mittleren Durchschnittsfigur $\alpha\beta\gamma$ ist, (vermöge §. 159), kürzer durch $h \,.\, \alpha\beta\gamma$ und die der Summe der beiden Pyramiden αADE und $\alpha A'D'E'$ gleiche Pyramide, welche, wie wir so eben gesehen haben, ebenfalls h zur Höhe und zur Grundfläche die Ergänzungsfigur ADE hat; (vermöge §. 166) durch $\frac{1}{3}h \,.\, ADE$ ausdrücken, so können wir die obige Angabe über die Größe des Obelisken in die folgende Gleichung zusammenfassen:

$$\text{Obelisk } ABCA'B'C' = h \,.\, \alpha\beta\gamma + \tfrac{1}{3}h \,.\, ADE,$$

womit die Richtigkeit unseres Satzes für einen dreiseitigen Obelisken dargethan ist.

2) Um dasselbe für einen vierseitigen Obelisken $ABCDA'B'C'D'$ (Fig. 78) zu erhalten, ziehen wir durch eine Ecke A in der Grundfläche $ABCD$ eine

---

*) Eben so gut könnte man auch durch γ eine Parallele zu BB' ziehen.

**) Der Körper $\alpha ED\beta BF$ ist ein Prisma, weil die Seitenkanten $\alpha\beta$, DB und EF nach §. 16 parallel laufen und die Grundflächen αDE und βBF nach §. 17 parallel sind. — Aus gleichen Gründen ist auch der Körper $\alpha D'E'\beta B'F'$ ein Prisma.

Linie, welche außerhalb des Winkels DAB fällt und die Verlängerungen der nicht durch A gehenden Grundkanten BC und CD in den Punkten E und F durchschneidet. Ferner legen wir durch die Kante AA′ und die Linie EF eine Ebene und erweitern die Seitenflächen BB′CC′ und CC′DD′, bis sie diese Ebene in den Kanten EE′ und FF′ durchschneiden. Durch diese Construction entstehen ein größerer dreiseitiger Obelisk CEFC′E′F′ und zwei kleinere dreiseitige Obelisken ABEA′B′E′ und ADFA′D′F′; und der gegebene vierseitige Obelisk ABCDA′B′C′D′ stellt sich als die Differenz dar, welche wir erhalten, wenn wir die beiden kleineren dreiseitigen Obelisken von dem größeren subtrahiren. — Construiren wir nun noch nach Anleitung des §. 123 zu diesen sämmtlichen Obelisken die mittleren Durchschnittsfiguren $\alpha\beta\gamma\delta$, $\gamma\varepsilon\varphi$, $\alpha\beta\varepsilon$ und $\alpha\delta\varphi$ und die Ergänzungsfiguren abcd, cef, abe und adf, so ist dem zu Folge, was wir bereits über den dreiseitigen Obelisken erwiesen haben:

$$\text{Obelisk } CEFC'E'F' = h \,.\, \gamma\varepsilon\varphi + \tfrac{1}{3}h \,.\, cef,$$
$$\text{〃} \quad ABEA'B'E' = h \,.\, \alpha\beta\varepsilon + \tfrac{1}{3}h \,.\, abe,$$
$$\text{〃} \quad ADFA'D'F' = h \,.\, \alpha\delta\varphi + \tfrac{1}{3}h \,.\, adf.$$

Subtrahiren wir die beiden letzten Gleichungen von der ersten, so ergiebt sich

$$\text{Obelisk } ABCDA'B'C'D' = h \,.\, \alpha\beta\gamma\delta + \tfrac{1}{3}h \,.\, abcd.$$

3) So wie wir den vierseitigen Obelisken als die Differenz eines größeren dreiseitigen und zweier kleineren dreiseitigen Obelisken erhalten haben, eben so läßt sich auch durch eine ähnliche Construction jeder mehrseitige (nseitige) Obelisk als die Differenz eines größeren dreiseitigen und mehrerer (n — 2) kleineren dreiseitigen Obelisken darstellen und dann die nehmliche Schlußfolge anwenden, durch welche wir die Richtigkeit des Satzes für den vierseitigen dargethan haben, so daß also unser Satz ganz allgemein für jeden Obelisken gilt, welches auch immer die Anzahl seiner Seitenflächen sein mag.

Anm. Man kann auch die Hilfsconstruction für einen mehrseitigen Obelisken dadurch vereinfachen, daß man zunächst den fünfseitigen als die Differenz eines größeren vierseitigen und zweier kleineren dreiseitigen Obelisken, eben so den sechsseitigen als die Differenz eines größeren fünfseitigen und zweier kleineren dreiseitigen Obelisken, überhaupt den nseitigen als die Differenz eines größeren n — 1seitigen und zweier kleineren dreiseitigen Obelisken darstellt.

Wir haben uns in dem oben geführten Beweise auf den einfachsten und am häufigsten Anwendung findenden Fall beschränkt, daß die Winkel der Grundfläche sämmtlich hohl sind. Der Beweis bleibt jedoch auch dann noch im Wesentlichen derselbe, wenn unter den Winkeln der Grundfläche eines mehrseitigen Obelisken erhabene vorkommen. Die in jedem besonderen Falle leicht aufzufindende Abänderung, welche der Beweis hierdurch erleiden kann, besteht nur darin, daß man, um den mehrseitigen Obelisken zu erhalten, nicht mehr von einem dreiseitigen, sondern von der Summe mehrerer dreiseitigen Obelisken die Summe der übrigen zu subtrahiren hat.

Mit dieser Abänderung kann man überhaupt als Hilfsebene jede beliebige die Grundkanten oder ihre Verlängerungen und die Seitenflächen oder ihre Erweiterungen durchschneidende Ebene annehmen. Allemal läßt sich der gegebene mehrseitige Obelisk als die Differenz zwischen den Summen mehrerer dreiseitigen Obelisken darstellen.

§. 170. Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt J eines Obelisken zu berechnen, wenn die Höhe desselben = h, die mittlere Durchschnittsfigur = M und die Ergänzungsfigur = E gegeben ist.

Aufl. $J = h(M + {}^1/_3 E)$.

Der Beweis ist im vorhergehenden §. enthalten.

Anm. Die so eben mitgetheilte Formel empfiehlt sich besonders dadurch, daß sie die Berechnung einer nicht unbedeutenden Zahl von Körpern umfaßt, für welche früher eben so viele besondere Formeln gemerkt werden mußten, und daß sie an Einfachheit und Kürze des Verfahrens keiner jener besonderen Formeln irgend nachsteht, vielmehr die meisten noch übertrifft. — Ein anderer praktischer Vortheil der obigen Formel besteht darin, daß in vielen Fällen die Ergänzungsfigur so klein ausfällt, daß man dieselbe, wenn es sich nur um eine ohngefähre Kenntniß der Größe eines Obelisken handelt, ganz vernachlässigen, also nach der abgekürzten Formel

$$J = h \,.\, M$$

rechnen kann, und daß sich die Größe des bei diesem abgekürzten Verfahren begangenen Fehlers leicht in Voraus abschätzen läßt. Dieser ist nehmlich im Allgemeinen um so kleiner, je weniger die Dimensionen der einen Grundfläche von denen der andern abweichen. Man kann daher von vorn herein leicht die Fälle beurtheilen, in welchen das abgekürzte Verfahren zulässig ist, und in welchen dasselbe ein von der Wahrheit zu sehr abweichendes Resultat ergeben würde.

§. 171. Zusatz.

Ein Obelisk, dessen Grundflächen ABCD und A′B′C′D′ (Fig. 79) Rechtecke sind, führt den französischen Namen Ponton und kann füglich den deutschen Namen Kasten erhalten *).

Ist nun von einem Kasten die Höhe $= h$, sind ferner die Längen der beiden Grundflächen $AB = a$ und $A'B' = a'$, die zugehörigen Breiten $AD = b$ und $A'D' = b'$ gegeben, also die Länge und Breite der mittleren Durchschnittsfigur $= \frac{a + a'}{2}$ und $\frac{b + b'}{2}$, ferner die Länge und Breite der Ergänzungsfigur $= \frac{a - a'}{2}$ und $\frac{b - b'}{2}$, so ist der Inhalt des Kastens

$$J = h \,.\left(\frac{a + a'}{2} \,.\, \frac{b + b'}{2} + {}^1/_3 \,.\, \frac{a - a'}{2} \,.\, \frac{b - b'}{2}\right).$$

Anm. 1. Ist z. B. $h = 6,\ a = 20,\ b = 9$
und $a' = 16,\ b' = 7$ gegeben, so ist

$$J = 6 \,.\, (18 \,.\, 8 + {}^1/_3 \,.\, 2 \,.\, 1) = 6 \,.\, (144 + {}^2/_3) = 868.$$

Anm. 2. Früher berechnete man den Inhalt des Kastens (Pontons) nach der minder bequemen Formel

$$J = {}^1/_6 h[b \,.\, (2a + a') + b'(2a' + a)].$$

Ueber die Uebereinstimmung dieser und der so eben mitgetheilten Formel vergl.: Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie, Essen 1843, S. 14.

*§. 172. Zusatz.

1) Ist von einem dreiseitigen Obelisken die Höhe $= h$ und sind die Höhen der beiden dreiseitigen Grundflächen $= a$ und a', die Grundlinien $= b$ und b' gegeben, so ist der Inhalt des dreiseitigen Obelisken

$$J = \frac{h}{2}\left(\frac{a + a'}{2} \,.\, \frac{b + b'}{2} + {}^1/_3 \frac{a - a'}{2} \,.\, \frac{b - b'}{2}\right),$$

---

*) Es pflegen nehmlich Vorrathskasten in Haushaltungen, Koffer, Truhen, die Bretterkasten der Wagen, welche Kohlen, Steine, überhaupt lose Gegenstände laden, Schubkarren u. a. m. diese Gestalt zu haben.

eine Formel, welche von der im vorhergehenden §. für den Kasten mitgetheilten, sich nur durch Hinzufügung des Divisors 2 unterscheidet.

2) Wenn die Grundflächen eines Obelisken Trapeze sind, derselbe also überhaupt von sechs Trapezen eingeschlossen ist, und die mittleren Längen der trapezischen Grundflächen = a und a′, ihre Breiten = b und b′ gegeben sind, ferner die Höhe des ganzen Körpers = h ist, so ist der Inhalt dieses Obelisken

$$J = h \cdot \left(\frac{a + a'}{2} \cdot \frac{b + b'}{2} + {}^1/_3 \cdot \frac{a - a'}{2} \cdot \frac{b - b'}{2}\right),$$

also ganz dieselbe Formel, wie für den Kasten (Ponton).

3) Wenn die Grundflächen eines Obelisken ähnliche Vielecke sind, also der Obelisk (nach §. 122) ein Theil einer Pyramide ist, und die eine Grundfläche = G, das Verhältniß einer Seite derselben zur gleichliegenden Seite in der anderen Grundfläche = m : n und die Höhe des ganzen Körpers = h gegeben ist, so ist vermöge §. 210 der Planimetrie

$$M = \left(\frac{m + n}{2m}\right)^2 . G \text{ und } E = \left(\frac{m - n}{2m}\right)^2 . G,$$

folglich der Inhalt der abgekürzten Pyramide

$$J = h . G . \left(\left(\frac{m + n}{2m}\right)^2 + {}^1/_3 \cdot \left(\frac{m - n}{2m}\right)^2\right).$$

(Noch mehr Beispiele giebt: Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie, S. 16, 22 u. f.)

Anm. 1. Da die Grundflächen eines dreiseitigen Obelisken einander ähnlich sind, so muß sich in der unter Nro. 1 des vorhergehenden §. mitgetheilten Formel a : a′ = b : b′ verhalten.

Ueber die nähere Begründung der unter Nro. 2 mitgetheilten Formel s. a. a. O. S. 15 und 16.

Früher berechnete man die abgekürzte Pyramide nach der weniger bequemen Formel

$$J = {}^1/_3 h . (G + \sqrt{GG'} + G'),$$

wo G und G′ die Grundflächen und h die Höhe des Körpers bezeichnen. Ueber die Zurückführung dieser Formel auf die oben unter Nro. 3 mitgetheilte s. a. a. O. S. 18 und 19.

Anm. 2. Wir haben bisher durchgehends angenommen, daß alle Seiten der einen (unteren) Grundfläche größer sind, als die gleichliegenden Seiten der andern (oberen) Grundfläche. Es können aber auch die Seiten der oberen Grundfläche zum Theil eben so groß oder kleiner sein, als die gleichliegenden Seiten der unteren Grundfläche. Verfolgt man indeß den Gang des Beweises in §. 169, so wird man sich in jedem besonderen Falle leicht von der Richtigkeit unseres Satzes überzeugen können. Wenn daher a und a′ zwei gleichliegende Seiten in der unteren und oberen Grundfläche eines Obelisken bezeichnen und a = a′ oder a < a′ sein sollte, so wird man in der Formel, welche überhaupt den Inhalt des auszumessenden Obelisken angiebt, im ersten Falle statt a — a′ Null, im andern eine negative Zahl zu setzen haben.

Ist z. B. von einem Kasten (Ponton) die Höhe h = 8, sind ferner die Seiten der unteren Grundfläche a = 12 und b = 4, die Seiten der oberen Grundfläche a′ = 9 und b′ = 6 gegeben, so ist

$$\frac{a + a'}{2} = 10^1/_2 \text{ und } \frac{a - a'}{2} = 1^1/_2$$

$$\frac{b + b'}{2} = 5 \quad \text{und} \quad \frac{b - b'}{2} = -1,$$

folglich, wenn wir diese Werthe in die Formel des §. 171 einsetzen, der Inhalt des Kastens

$$J = 8.(10^1/_2 . 5 + {}^1/_3 . 1\,{}^1/_2 . -1) = 8.(52\,{}^1/_2 - {}^1/_2) = 8.52 = 416.$$

Anm. 3. Wenn in einem Trapeze die kleinere Parallele bis Null abnimmt, so geht das Trapez in ein Dreieck über; man kann daher das Dreieck als einen besonderen Fall des Trapezes ansehen, der entsteht, wenn die kleinere Parallele verschwindet. Unser Satz muß daher auch noch für solche Körper gelten, welche parallele Grundflächen und zu Seitenflächen theils Trapeze, theils Dreiecke haben. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des folgenden Falles *):

Wenn in einem Obelisken, dessen Grundflächen Trapeze sind, die Breite der oberen Grundfläche verschwindet, so verwandelt sich derselbe in einen Körper, welcher von drei Trapezen ABED, ACFD und BCFE und zwei Dreiecken ABC und DEF (Fig. 80) eingeschlossen ist. Dieser Körper ist offenbar ein Theil eines dreiseitigen prismatischen Raumes (§. 110), da die drei Kanten AD, BE und CE parallel laufen, und führt den Namen eines dreiseitigen prismatischen Abschnittes. Er unterscheidet sich von dem dreiseitigen Prisma darin, daß die Ebenen der Dreiecke ABC und DEF nicht nothwendig einander parallel sind. Denken wir uns nun diesen Körper aus einem Obelisken, dessen untere Grundfläche das Trapez ABED bildet, dadurch hervorgegangen, daß die Breite der oberen trapezischen Grundfläche verschwunden und folglich ihre Länge CF allein noch übrig geblieben ist, so werden wir den Inhalt dieses Körpers nach der in §. 172, Nro. 2 mitgetheilten Formel:

$$J = h\left(\frac{a + a'}{2} . \frac{b + b'}{2} + {}^1/_3 . \frac{a - a'}{2} . \frac{b - b'}{2}\right)$$

berechnen können. Wenn wir nun der Kürze wegen die Kante AD = k, BE = l und CF = m setzen, ferner den Körper mit einer zu diesen parallelen Kanten senkrechten Ebene KLM durchschneiden und die Höhe dieses Dreiecks MN = h, die Grundlinie KL = g annehmen, so werden wir, um die angeführte Formel auf unsere Körper anzuwenden, zu setzen haben:

$$a = \frac{k + l}{2}, \; b = g, \; a' = m, \; b' = o \text{ und } h = h,$$

folglich

$$\frac{a + a'}{2} = \frac{k + l + 2m}{4}, \; \frac{a - a'}{2} = \frac{k + l - 2m}{4} \text{ und } \frac{b + b'}{2} = \frac{b - b'}{2} = \frac{g}{2}.$$

Hiernach verwandelt sich die obige Formel in:

$$J = h\left(\frac{k + l + 2m}{4} . \frac{g}{2} + {}^1/_3 . \frac{k + l - 2m}{4} . \frac{g}{2}\right)$$

$$= \frac{h . g}{2} . \left(\frac{k + l + 2m}{4} + \frac{k + l - 2m}{12}\right)$$

$$= \frac{h . g}{2}\left(\frac{4k + 4l + 4m}{12}\right) = \frac{h . g}{2} . \left(\frac{k + l + m}{3}\right).$$

Nun ist aber $\frac{h . g}{2}$ der Inhalt des Dreiecks KLM, und die so eben erhaltene Formel

---

*) Noch einen andern, in praktischer Hinsicht nicht unwichtigen Fall behandelt: Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie S. 25.

läßt sich folglich auch so schreiben:

$$J = \triangle KLM \cdot \left(\frac{k + l + m}{3}\right)$$

d. h.: Der Inhalt eines dreiseitigen prismatischen Abschnitts wird gefunden, wenn man den senkrechten Durchschnitt mit der Summe der drei Kanten multiplicirt und durch drei dividirt.

Der Inhalt eines mehrseitigen prismatischen Abschnitts wird erhalten, wenn man denselben durch Diagonalebenen in dreiseitige zerschneidet.

Anm. 4. Diese Rechnung läßt wesentliche Abkürzung zu bei einem parallelepipedischen Abschnitte, d. h. bei einem solchen, dessen gegenüberstehende Seitenflächen einander parallel laufen. Ist nehmlich in Fig. 81 Ebene AA'BB' || CC'DD' und Ebene AA'DD' || BB'CC', so sind, wie leicht zu sehen, die Vierecke ABCD und A'B'C'D' Parallelogramme. Dasselbe gilt eben so von dem senkrechten Durchschnitte $\alpha\beta\gamma\delta$. Bezeichnen wir nun die parallelen Kanten AA', BB', CC' und DD' beziehlich mit a, b, c, d und legen wir durch zwei gegenüberstehende Kanten AA' und CC' und durch BB' und DD' Ebenen, welche sich in einer den gedachten Kanten parallelen Linie EE' durchschneiden, so ist EE' sowohl die mittlere Länge des Trapezes AA'CC', als auch des Trapezes BB'DD', folglich sowohl gleich $(a + c) : 2$, als auch gleich $(b + d) : 2$, daher

$$a + c = b + d.$$

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt des senkrechten Durchschnittes $\alpha\beta\gamma\delta$ mit F, so ist zu Folge des Vorhergehenden der körperliche Inhalt des dreiseitigen prismatischen Abschnittes ABCA'B'C'

$$= {}^1/_2 F \cdot \left(\frac{a + b + c}{3}\right)$$

und der körperliche Inhalt des prismatischen Abschnittes ACDA'C'D'

$$= {}^1/_2 F \cdot \left(\frac{a + c + d}{3}\right)$$

also der körperliche Inhalt des parallelepipedischen Abschnittes ABCDA'B'C'D'

$$J = {}^1/_2 F \cdot \left(\frac{2a + b + 2c + d}{3}\right).$$

Wie wir oben gesehen haben, ist aber $b + d = a + c$, folglich $2a + b + 2c + d$, $= 3a + 3c$, daher

$$J = F \cdot \left(\frac{a + c}{2}\right),$$

d. h.: der Inhalt eines parallelepipedischen Abschnittes wird erhalten, wenn man den senkrechten Durchschnitt mit der halben Summe zweier gegenüberstehenden Kanten multiplicirt.

§. 173. Lehrsatz.

Ein mit der Grundfläche parallel abgekürzter Kegel ist gleich der Summe aus einem Cylinder und einem Kegel, welche beide mit dem abgekürzten Kegel gleiche Höhe haben, und von denen der Cylinder die halbe Summe, der Kegel aber die halbe Differenz der Radien der beiden Grundflächen des abgekürzten Kegels zu Radien der Grundflächen hat.

Beweis. Wenn wir uns den abgekürzten Kegel als einen Obelisken mit regelmäßigen Grundflächen von unendlich vielen Seiten denken, so werden wir denselben nach §. 169 gleich der Summe aus einem Cylinder und einem Kegel setzen können, welche beide mit dem Obelisken gleiche Höhe haben und von denen der Cylinder die mittlere Durchschnittsfigur, der Kegel die Ergän=

zungsfigur zur Grundfläche hat. Nun ist aber der Radius der mittleren Durchschnittsfigur offenbar der halben Summe und der Radius der Ergänzungsfigur der halben Differenz der Radien der beiden Grundflächen des abgekürzten Kegels gleich, — woraus die Richtigkeit des aufgestellten Satzes hervorgeht.

§. 174. Aufgabe.

Aus der Höhe h und den Radien r und ϱ der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels den körperlichen Inhalt desselben J zu berechnen.

Aufl. Wenn wir uns den abgekürzten Kegel nach dem vorhergehenden §. in einen Cylinder und einen Kegel zerfällt denken, so ist nach §. 162 der Inhalt des Cylinders $= \left(\frac{r+\varrho}{2}\right)^2 \pi h$ und nach §. 168 der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{r-\varrho}{2}\right)^2 \pi h$, folglich der Inhalt des abgekürzten Kegels J $= \pi h \left(\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{r-\varrho}{2}\right)^2\right)$.

Anm. 1. Ist z. B. von einem abgekürzten Kegel $r = 9$, $\varrho = 5$, also $\frac{r+\varrho}{2} = 7$, $\frac{r-\varrho}{2} = 2$ und $h = 8$ gegeben, so ist der körperliche Inhalt desselben, wenn wir für π den Näherungswerth $3\frac{1}{7}$ setzen:

$$J = \frac{22}{7} \cdot 8 \cdot (49 + \frac{4}{3}) = 1265\frac{11}{21}.$$

Anm. 2. Wenn man den eingeschlossenen Theil der obigen Formel entwickelt, so verwandelt sich dieselbe in

$$J = \pi h \left(\frac{r^2 + 2r\varrho + \varrho^2}{4} + \frac{r^2 - 2r\varrho + \varrho^2}{12}\right)$$
$$= \pi h \left(\frac{4r^2 + 4r\varrho + 4\varrho^2}{12}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\pi h (r^2 + r\varrho + \varrho^2),$$

welches die in praktischer Hinsicht minder bequeme Formel ist, nach welcher man früher den abgekürzten Kegel berechnete.

Anm. 3. Die Anwendung des obigen Lehrsatzes (§. 169) auf solche Körper, welche von krummen Flächen eingeschlossen werden, beschränkt sich jedoch nicht bloß auf den abgekürzten Kegel, sondern erstreckt sich überhaupt über alle Körper, welche zwei parallele Grundflächen und eine krumme Seitenfläche haben, auf der sich gerade Linien ziehen lassen, welches auch immer die krummen Linien sein mögen, welche die Grundflächen begrenzen. Als Beispiel wollen wir einen Körper annehmen, dessen beide Grundflächen Ellipsen sind, wie dieß bei Wannen, Tonnen u. dgl. m. nicht selten der Fall ist. Wir setzen hier als bekannt voraus, daß der Flächeninhalt einer Ellipse gleich ist dem Producte der beiden halben Axen und der Verhältnißzahl π *). Sind nun von dem auszumessenden Körper die beiden halben Axen der einen Grundfläche = a und b, die beiden halben Axen der anderen Grundflächen = a' und b', und ist die Höhe des ganzen Körpers = h gegeben, so ist sein Inhalt

$$J = \pi h \left(\frac{a + a'}{2} \cdot \frac{b + b'}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a - a'}{2} \cdot \frac{b - b'}{2}\right).$$

---

*) Vergl. die Anmerkung zu §. 1 des Anhangs.

D. Kugel.

§. 175. Aufgabe.

Aus dem Radius r einer Kugel ihren Inhalt J zu berechnen.

Aufl. So wie der Kreis einem Dreiecke gleich ist, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat, so ist die Kugel einer Pyramide gleich, welche die Kugeloberfläche zur Grundfläche und den Radius zur Höhe hat. Nach §. 143 ist die Kugeloberfläche $= 4r^2\pi$, folglich wenn wir mit $^1/_3 r$ multipliciren, der gesuchte Inhalt der Kugel

$$J = {}^4/_3 r^3 \pi.$$

Anm. 1. Ist z. B. von einer Kugel $r = 5$ gegeben, so ist näherungsweise

$$J = {}^4/_3 \,.\, 125 \,.\, 3^1/_7 = 523^{17}/_{21}.$$

Anm. 2. Durch den vorhergehenden §. sind wir auch in den Stand gesetzt, die beiden folgenden Aufgaben zu lösen:

1) Den Inhalt eines Kugelabschnitts zu berechnen, wenn der Radius der Kugel r und die Höhe des Abschnitts h gegeben ist.

Aufl. Wird der Kreisausschnit ACB (Fig. 82) um den Radius AC als Axe gedreht, so beschreibt er einen kegelförmigen Kugelausschnitt, der offenbar einer Pyramide gleich ist, welche die vom Bogen AB beschriebene Calotte $(2r\pi h)$ zur Grundfläche und den Radius r zur Höhe hat, folglich ist

der Inhalt des kegelförmigen Ausschnitts $= {}^2/_3 r^2 \pi h$.

Um den Inhalt des Abschnitts zu erhalten, hat man noch den Inhalt des Kegels zu berechnen, welcher bei der Umdrehung durch das Dreieck BCD erzeugt wird, und hierzu ist vor Allem die Bestimmung der Linie BD erforderlich, welche sich aber ganz leicht aus der Gleichung

$$h : BD = BD : 2r - h \text{ oder } BD^2 = h(2r - h)$$

ergiebt. — Hiernach ist der Inhalt des Kegels $= {}^1/_3 BD^2 \,.\, \pi \,.\, CD = {}^1/_3 h(2r - h)\, \pi\, (r - h)$, folglich der Inhalt des Abschnitts

$$J = {}^1/_3 \pi h[2r^2 - (2r - h) \,.\, (r - h)] = {}^1/_3 \pi h(3rh - h^2)$$
$$= {}^1/_3 \pi h^2 (3r - h).$$

2) Den Inhalt einer körperlichen Kugelzone zu bestimmen, wenn der Radius der Kugel r, die Höhe der Zone h und der Abstand ihrer größeren Grundfläche vom Kugelmittelpunkte a gegeben ist.

Aufl. Die körperliche Zone ist gleich dem Unterschiede zweier Kugelabschnitte, von denen der größere die Höhe $r - a$ und der kleinere die Höhe $r - a - h$ hat; der Inhalt der körperlichen Zone ist daher nach (1)

$$J = {}^1/_3 \pi \,.\, [(r - a)^2 \,.\, (2r + a) - (r - a - h)^2 \,.\, (2r + a + h)],$$

oder nach einigen Zusammenziehungen

$$J = {}^1/_3 \pi h(3r^2 - 3a^2 - 3ah - h^2).$$

Bezeichnet man den Radius der größeren Grundfläche der Zone mit ϱ_1 und den Radius der kleineren Grundfläche mit ϱ_2, so ist wie man leicht sieht:

$$\varrho_1^2 = r^2 - a^2$$
$$\varrho_2^2 = r^2 - (a + h)^2 = r^2 - a^2 - 2ah - h^2,$$

folglich $\dfrac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + h^2}{2} = r^2 - a^2 - ah.$

Hiernach läßt sich dem Ausdrucke für den Inhalt der Zone auch folgende merkenswerthe Gestalt geben: $J = {}^1/_3 \pi h \,.\, [{}^3/_2(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + h^2) - h^2]$

$$= {}^1/_6 \pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$$
$$= {}^1/_2 \pi h(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + {}^1/_3 h^2).$$

Aus dieser Formel folgt, daß die Zone drei Körpern zusammen genommen gleich ist, nehmlich zweien Cylindern mit der Höhe $^1/_2h$ und den Radien ϱ_1 und ϱ_2 und einer Kugel mit dem Radius $^1/_2h$.

Es ist übrigens äußerst merkwürdig, daß sich der Inhalt des Kugelabschnittes und der Inhalt der Zone durch so einfache algebraische Ausdrücke darstellen läßt, während es gar nicht möglich ist, den Inhalt des Kreisabschnittes oder eines Theiles des Kreises, der von zwei parallelen Sehnen begrenzt wird, durch einen bloß algebraischen Ausdruck darzustellen.

§. 176. Zusatz.

Haben ein Kegel, eine Kugel und ein Cylinder einerlei Höhe und Durchmesser (2r), so verhalten sich ihre körperlichen Inhalte wie die Zahlen 1, 2, 3.

Beweis. Denn es verhält sich

$$\text{Kegel} : \text{Kugel} : \text{Cylinder} = {}^1/_3 r^2\pi \,.\, 2r : {}^4/_3 r^3\pi : r^2\pi \,.\, 2r,$$
$$= {}^2/_3 : {}^4/_3 : 2 = 1 : 2 : 3.$$

§. 177. Zusatz.

Aus §. 143 und 175 folgt:

1) Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser oder Radien, und

2) ihre körperlichen Inhalte verhalten sich wie die Kuben (dritten Potenzen) der Durchmesser oder Radien.

Anm. Aehnliche Bestimmungen gelten von ähnlichen Körpern überhaupt. — Da zunächst bei ähnlichen eckigen Körpern die Seitenflächen nach der Reihe ähnlich sind und sich also sämmtlich wie die Quadrate ähnlich liegender Kanten verhalten, so müssen offenbar auch die ganzen Oberflächen in diesem Verhältnisse zu einander stehen. — Bei ähnlichen Pyramiden und Prismen verhalten sich die ähnlich liegenden Kanten wie die Höhen, also die ganzen Oberflächen wie die Quadrate der Höhen. Dasselbe muß folglich auch von ähnlichen Kegeln und Cylindern gelten, und da sich bei diesen die Höhen wie die Radien oder Durchmesser der Grundflächen verhalten, so stehen folglich die Oberflächen im quadratischen Verhältnisse dieser Radien oder Durchmesser, wie dieß für gerade Kegel und Cylinder bereits in den Anm. zu §. 127 und 130 dargethan ist.

So wie sich ähnliche Polygone durch Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerschneiden lassen, so können offenbar auch ähnliche Polyeder in ähnliche Pyramiden zerschnitten werden. Die Inhalte zweier Pyramiden überhaupt verhalten sich

$$J : J' = G \,.\, h : G' \,.\, h';$$

bei ähnlichen Pyramiden ist aber nach §. 124 Anm. 2

$$G : G' = h^2 : h'^2,$$

also

$$J : J' = h^3 : h'^3;$$

da sich nun die Höhen wie homologe Kanten verhalten, so verhalten sich folglich die Inhalte zweier ähnlichen Pyramiden wie die Kuben homologer Kanten, und in dem nehmlichen Verhältnisse stehen nach dem Obigen die Inhalte ähnlicher Polyeder überhaupt. — Die Inhalte ähnlicher Cylinder und Kegel verhalten sich daher auch, wie man leicht begreift, wie die Kuben der Radien oder Durchmesser ihrer Grundflächen.

Bemerkung. Zur bequemen Uebersicht wollen wir hier noch die im Vorhergehenden enthaltenen Formeln über die Berechnung des Inhalts und der Oberflächen der Körper zusammenstellen. — Es ist nach den früher angewendeten Bezeichnungen

1) beim Würfel .... der Inhalt $= a^3$;
2) beim rechtwinkeligen Parallelepipedum .... der Inhalt $= a \cdot b \cdot c$;
3) beim Prisma .... der Inhalt $= G \cdot h$;
4) bei der Pyramide .... der Inhalt $= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$;
5) beim Obelisken .... der Inhalt $= h \cdot (M + \frac{1}{3}E)$;
6) beim Cylinder .... der Mantel $= 2r\pi h$, der Inhalt $= r^2\pi h$;
7) beim Kegel .... der Mantel $= r\pi f$, der Inhalt $= \frac{1}{3}r^2\pi h$;
8) beim abgekürzten Kegel .... der Mantel $= (r + \varrho)\pi f$, der Inhalt $= \pi h \left[\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r-\varrho}{2}\right)^2\right]$;
9) bei der Kugel .... die ganze Oberfläche $= 4r^2\pi$, die Oberfläche der Zone oder Calotte $= 2r\pi h$, der Inhalt $= \frac{4}{3}r^3\pi$.

Die Ausdrücke für den Mantel in (6), (7) und (8) gelten jedoch nur dann, wenn Cylinder und Kegel gerade sind.

Achter Abschnitt.

Stereometrisch-algebraische Aufgaben.

§. 178. Aufgabe.

Von einem rechtwinkligen Parallelepipedum sind drei zusammenstoßende Kanten $AB = a$, $AD = b$ und $AE = c$ (Fig. 83) gegeben; es soll hieraus die Diagonale $AG = d$ berechnet werden.

Aufl. Wenn wir die Linie AC ziehen, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ACG $\quad d^2 = AC^2 + CG^2 = AC^2 + c^2$;
ferner ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC (nach der Voraussetzung ist Winkel ABC ein rechter):

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2.$$

Setzen wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung ein, so erhalten wir:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2, \text{ also } d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

§. 179. Zusatz.

Wenn die Grundfläche des rechtwinkligen Parallelepipedums ein Quadrat, also $b = a$ ist, so verwandelt sich die Gleichung des vorhergehenden §. in

$$d^2 = 2a^2 + c^2, \text{ also } d = \sqrt{2a^2 + c^2}.$$

Sind überdieß auch die Seitenflächen Quadrate, also das rechtwinklige Parallelepipedum ein Würfel, so ist $c = b = a$, und es geht jene Gleichung über in

$$d^2 = 3a^2, \text{ also } d = a\sqrt{3}.$$

§. 180. Aufgabe.

Von einem Würfel ist der Unterschied zwischen der Diagonale und der Kante = d gegeben; es sollen hieraus die Kante x und die Diagonale z berechnet werden.

Aufl. Aus dem vorhergehenden §. erhalten wir die Gleichung

$$z^2 = 3x^2$$

und unmittelbar aus der Aufgabe die Gleichung

$$z - x = d.$$

Indem wir diese Gleichungen auf bekannte Weise auflösen, ergiebt sich

$$x = {}^1\!/_2 d + \sqrt{{}^5\!/_4 d^2} = \frac{d(1+\sqrt{5})}{2}$$

und

$$z = {}^3\!/_2 d + \sqrt{{}^5\!/_4 d^2} = \frac{d(3+\sqrt{5})}{2}.$$

Anm. Vor der Wurzel kann nur das Zeichen (+) stehen; denn wollte man vor dieselbe (—) setzen, so würden die Werthe von x und z negativ werden, was ungereimt wäre, da x und z die Maaßzahlen von Linien vorstellen.

§. 181. Aufgabe.

Von einem rechtwinkligen Parallelepipedum, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, ist die Diagonale = d und die Summe aus der Grundkante und der Seite = f gegeben; wie groß sind diese beiden Linien?

Aufl. Wir erhalten zunächst, wenn wir die Grundkante mit x und die Seitenkante mit y bezeichnen, aus der Aufgabe selbst die Gleichung

$$x + y = f$$

und aus §. 179 die Gleichung

$$2x^2 + y^2 = d^2.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergiebt sich

$$x = \frac{f \pm \sqrt{3d^2 - 2f^2}}{3} \text{ und } y = \frac{2f \mp \sqrt{3d^2 - 2f^2}}{3}.$$

Anm. Aus diesen Gleichungen folgt zunächst, daß

$$2f^2 \overline{\gtrless} 3d^2, \text{ also } f \overline{\gtrless} d\sqrt{{}^3\!/_2}$$

sein muß, da entgegengesetzten Falles der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ, also der Wurzelausdruck selbst imaginär würde. Weiter geht aus jenen Gleichungen hervor, daß die Aufgabe zwei Auflösungen zuläßt, daß es also zwei verschiedene Parallelepipeda geben kann, welche den aufgestellten Bedingungen Genüge leisten. Damit jedoch diese wirklich existiren, müssen beide Werthe von x und y positiv sein. Dieß ist in Beziehung auf die Werthe von x der Fall, so lange

$$f > \sqrt{3d^2 - 2f^2},$$

d. h. wenn wir quadriren: $f^2 > 3d^2 - 2f^2$,

also $3f^2 > 3d^2$

und folglich $f > d$

ist. Die Werthe von y sind beide positiv, wenn

$$2f > \sqrt{3d^2 - 2f^2},$$

also $4f^2 > 3d^2 - 2f^2$

oder $6f^2 > 3d^2$, d. h. $f > d\sqrt{{}^1\!/_2}$

ist. Da hiernach die Werthe von y gewiß positiv sind, wenn dieß für beide Werthe von x gilt, so ergeben sich aus der vorstehenden Entwickelung folgende Resultate:

1) Die Aufgabe ist gar nicht zu lösen, wenn $f > d\sqrt{1/2}$ ist.

2) Die Aufgabe hat nur eine Auflösung, wenn $f = d\sqrt{3/2}$ ist. In diesem Falle wird $x = 1/3 f$ und $y = 2/3 f$.

3) Die Aufgabe hat zwei Auflösungen, wenn $f < d\sqrt{3/2}$, aber $> d$ ist.

4) Die Aufgabe hat nur eine Auflösung, wenn $f < d$, aber $> d\sqrt{1/2}$ ist. Es kann dann in dem Werthe von x vor der Wurzel nur das Zeichen (+) gelten; das Zeichen (—) würde für x einen negativen Werth ergeben.

5) Die Aufgabe ist abermals nicht zu lösen, wenn $f < d\sqrt{1/2}$ ist. Denn es giebt dann auch das obere Vorzeichen vor dem Wurzelausdruck für y einen negativen Werth. Will man aber das untere Vorzeichen gelten lassen, so wird x negativ.

§. 182. Aufgabe.

In einem rechtwinkligen Parallelepipedum verhalten sich die zusammenstoßenden Kanten wie $m : n : p$; wenn nun die Diagonale $= d$ gegeben ist, wie groß sind die Kanten?

Aufl. Bezeichnen wir die gesuchten Kanten mit x, y und z, so erhalten wir leicht die Gleichungen

$$x : y = m : n,$$
$$x : z = m : p$$

und
$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2$$

und hieraus:

$$x = \frac{md}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad y = \frac{nd}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad z = \frac{pd}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Anm. Denken wir uns ein rechtwinkliges Parallelepipedum mit den Kanten m, n und p construirt, so ist dasselbe dem aufzulösenden Parallelepipedum ähnlich und die Diagonale desselben $= \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$. Bezeichnen wir dieselbe der Kürze wegen mit v, so verhält sich

$$x : m = d : v, \quad y : n = d : v, \quad z : p = d : v,$$

woraus sich auf der Stelle die oben für x, y und z berechneten Werthe ergeben.

§. 183. Aufgabe.

Die Kanten x, y und z eines rechtwinkligen Parallelepipedums zu berechnen, wenn das Verhältniß derselben $= m : n : p$ und der körperliche Inhalt des Parallelepipedums $= J$ gegeben ist.

Aufl. Nach §. 157 ist

$$x \cdot y \cdot z = J$$

und zu Folge der Aufgabe
$$x : y = m : n$$

und
$$x : z = m : p.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$y = \frac{nx}{m} \text{ und } z = \frac{px}{m}.$$

Setzen wir diese Werthe in die erste Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{npx^3}{m^2} = J;$$

hieraus folgt
$$x^3 = \frac{m^2 J}{np},$$

oder wenn wir Zähler und Nenner dieses Bruches mit m multipliciren:

$$x^3 = \frac{m^3 J}{mnp},$$

also
$$x = m\sqrt[3]{\frac{J}{mnp}}$$

und folglich
$$y = n\sqrt[3]{\frac{J}{mnp}},\ z = p\sqrt[3]{\frac{J}{mnp}}.$$

Anm. Denken wir uns ein rechtwinkliges Parallelepipedum mit den Kanten m, n und p construirt, so ist dasselbe dem zu berechnenden Parallelepipedum ähnlich und sein Inhalt = mnp. Da sich nun ähnliche Körper wie die Kuben gleichliegender Kanten verhalten, so ist folglich

$$x^3 : m^3 = J : mnp, \text{ also } x = m\sqrt[3]{\frac{J}{mnp}}.$$

Auf gleiche Weise lassen sich die oben berechneten Werthe von y und z erhalten.

§. 184. Aufgabe.

Von zwei Würfeln, deren Kanten wir mit x und y bezeichnen, ist die Summe dieser Kanten $x + y = b$
und die Summe der körperlichen Inhalte

$$x^3 + y^3 = a^3$$

gegeben; es sind hieraus x und y zu berechnen.

Aufl. $x = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{4a^3 - b^3}{12b}},\ y = \frac{1}{2}b \mp \sqrt{\frac{4a^3 - b^3}{12b}}.$

Anm. Da die Werthe von x und y sich vertauschen lassen, so hat die Aufgabe ohnerachtet des doppelten Zeichens vor der Wurzel nur eine Auflösung. Damit aber diese Auflösung wirklich existirt, muß vor allen Dingen der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv, also

$$1)\quad b^3 \leqq 4a^3, \text{ d. h. } b \leqq a\sqrt[3]{4}$$

sein. Ist gerade $b^3 = 4a^3$, so verschwindet der Wurzelausdruck und folglich ist dann $x = y = \frac{1}{2}b$; ist aber $b^3 > 4a^3$, so werden die Werthe von x und y imaginär. Damit ferner x und y positive Werthe erhalten, muß

$$\frac{1}{2}b > \sqrt{\frac{4a^3 - b^3}{12b}}$$

sein. Quadriren wir, so folgt hieraus:

$$\frac{1}{4}b^2 > \frac{4a^3 - b^3}{12b},$$

und wenn wir die Brüche wegschaffen:

$$3b^3 > 4a^3 - b^3,$$

also
$$2)\quad 4b^3 > 4a^3, \text{ d. h. } b > a.$$

Zu Folge (1) und (2) muß also b zwischen den Ganzen a und $a\sqrt[3]{4} = a . 1{,}587 \ldots$ liegen.

§. 185. Aufgabe.

Aus der Grundkante AB = a und der Seitenkante AE = b (Fig. 84) einer vierseitigen regelmäßigen Pyramide, (welche zur Grundfläche ein Quadrat und zu Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke hat,) die Höhe AF = h und den körperlichen Inhalt J zu berechnen.

Aufl. In dem rechtwinkligen Dreiecke AFE ist

$$h^2 = b^2 - AF^2 = b^2 - \frac{1}{4}AC^2;$$

ferner ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2.$$

Setzen wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung ein, so ergiebt sich

$$1)\quad h^2 = b^2 - \frac{1}{2}a^2, \text{ also } h = \sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2}.$$

Da nun der Inhalt der Grundfläche ABCD $= a^2$ ist und bekanntlich der körperliche Inhalt einer Pyramide dem dritten Theile des Productes aus Höhe und Grundfläche gleich ist, so ist folglich

$$2)\qquad J = \frac{1}{3}a^2 . \sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2}.$$

§. 186. Zusatz.

Sind die Seitenflächen der vierseitigen regelmäßigen Pyramide gleichseitige Dreiecke, also $a = b$, so geht die Gleichung (2) des vorhergehenden §. über in

$$J = \frac{1}{3}a^2 . \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{3}a^3\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}a^3\sqrt{2}.$$

Das regelmäßige Oktaeder, welches bekanntlich von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, läßt sich, wie leicht zu sehen, in zwei Pyramiden von der eben angegebenen Beschaffenheit zerschneiden; der körperliche Inhalt desselben ist folglich $= \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$.

§. 187. Aufgabe.

Von einer vierseitigen regelmäßigen Pyramide ist die Grundkante AB $= a$ (Fig. 84) und der Unterschied zwischen der Seitenkante und der Höhe AE — EF $= d$ gegeben; es sollen hieraus diese beiden Linien (AE $= z$ und EF $= x$) berechnet werden.

Aufl. Aus der Aufgabe ergiebt sich unmittelbar die Gleichung

$$z - x = d$$

und aus §. 185 die zweite Gleichung

$$x^2 = z^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

Lösen wir diese Gleichungen auf bekannte Weise auf, so erhalten wir

$$z = \frac{a^2 + 2d^2}{4d} \text{ und } x = \frac{a^2 - 2d^2}{4d}.$$

§. 188. Aufgabe.

Von einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide ABCD (Fig. 85) ist die Grundkante BC $= a$ und die Seitenkante AB $= b$ gegeben; es sollen hieraus die senkrechte Höhe AE $= h$ und der körperliche Inhalt J berechnet werden.

Aufl. Wie leicht zu sehen, ist der Fußpunkt E der Höhe zugleich der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks BCD, also BE = CE = DE und BF = CF. Demnach ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BFD

$$DF^2 = BD^2 - BF^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

also

$$DF = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

Das Dreieck BFE ist $\sim$ BFD, weil beide den Winkel F gemeinschaftlich haben und Winkel EBF $= 30^0 =$ BDF ist. Da nun BF $= \frac{1}{2}$BD ist, so

ist folglich auch $EF = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} DE$, also $DE = \frac{2}{3} DF$. *), und daher

$$DE^2 = \frac{4}{9} DF^2 = \frac{1}{3} a^2.$$

In dem rechtwinkligen Dreiecke AED ist ferner

$$h^2 = AE^2 = AD^2 - DE^2 = b^2 - \frac{1}{3} a^2,$$

also $$1)\ h = \sqrt{b^2 - \frac{1}{3} a^2}.$$

Der Inhalt der gleichseitigen Grundfläche BCD ist bekanntlich

$$= \frac{1}{2} BC . DF$$

oder wenn wir die Werthe von BC und DF einsetzen:

$$= \frac{1}{2} a . \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}.$$

Multipliciren wir diesen Ausdruck mit h und dividiren durch 3, so erhalten wir

$$2)\ J = \frac{1}{12} a^2 . \sqrt{3} . \sqrt{b^2 - \frac{1}{3} a^2} = \frac{1}{12} a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

§. 189. Zusatz.

In dem regelmäßigen Tetraeder, welches bekanntlich von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, ist $b = a$, daher die Höhe

$$1)\ h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3} a^2} = \sqrt{\frac{2}{3} a^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

und der körperliche Inhalt

$$2)\ J = \frac{1}{12} a^2 \sqrt{2 a^2} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}.$$

§. 190. Aufgabe.

Eine gegebene Pyramide durch eine der Grundfläche parallele Ebene in zwei Stücke zu zerschneiden, welche sich wie $m : n$ verhalten.

Aufl. Es sei bcde (Fig. 56) die gesuchte Theilungsebene; da sich die Pyramide Abcde zu der abgekürzten Pyramide bcdeBCDE wie $m : n$ verhalten soll, so ist das Verhältniß der kleineren Pyramide zu der gegebenen ganzen Pyramide $\quad Abcde : ABCDE = m : m + n$.

Da ferner die Ebene bcde der Ebene BCDE parallel ist, so sind die beiden Pyramiden ähnlich und verhalten sich folglich wie die Kuben ihrer gleichliegenden Kanten, also auch wie die Kuben ihrer Höhen. Bezeichnen wir daher die Höhe der kleineren Pyramide mit x, der ganzen Pyramide mit h, so verwandelt sich die obige Proportion in

$$x^3 : h^3 = m : m + n,$$

woraus sich ergibt $$x = h\sqrt[3]{\frac{m}{m + n}}.$$

§. 191. Zusatz.

Auf ganz gleiche Weise wird ein Kegel durch eine der Grundfläche parallele Ebene nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse getheilt.

§. 192. Aufgabe.

Eine abgekürzte Pyramide durch eine den Grundflächen parallele Ebene nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse $m : n$ zu theilen.

Aufl. Wir bezeichnen der Kürze wegen die größere Grundfläche der gegebenen abgekürzten Pyramide (Fig. 86) mit A, die kleinere mit B, die gesuchte Theilungsebene mit Z, drei gleichliegende Seiten dieser drei ähnlichen

---

*) Einen andern Grund für die Richtigkeit dieser Behauptung liefert §. 228 der Planimetrie.

Figuren mit a, b und z, ferner, indem wir die Seitenkanten verlängern, bis sie sich im Punkte P schneiden, die zwischen der Spitze P und den Grundflächen A, B und Z liegenden Pyramiden mit PA, PB und PZ; dann ist

$$PA : PZ = a^3 : z^3$$

und

$$PZ : PB = z^3 : b^3,$$

folglich

$$\frac{PA - PZ}{PZ} = \frac{a^3 - z^3}{z^3}$$

und

$$\frac{PZ - PB}{PZ} = \frac{z^3 - b^2}{z^3}.$$

Dividiren wir die beiden letzten Proportionen durch einander, so erhalten wir weiter

$$\frac{PA - PZ}{PZ - PB} = \frac{a^3 - z^3}{z^3 - b^3}.$$

Nun sind aber PA — PZ und PZ — PB die gesuchten Theile, welche sich zu Folge der Aufgabe wie n : m verhalten sollen; hiernach verwandelt sich die vorhergehende Proportion in

$$\frac{n}{m} = \frac{a^3 - z^3}{z^3 - b^3},$$

woraus sich weiter ergibt

$$nz^3 - nb^3 = ma^3 - mz^3$$

oder

$$(m + n)z^3 = ma^3 + nb^3,$$

also

$$z = \sqrt[3]{\frac{ma^3 + nb^3}{m + n}}.$$

§. 193. Zusatz.

Auf gleiche Weise wird ein abgekürzter Kegel durch eine den Grundflächen parallele Ebene nach vorgeschriebenem Verhältnisse getheilt.

Durch die beiden vorhergehenden Aufgaben wird man auch in den Stand gesetzt, die folgenden Aufgaben zu lösen: Von einer vollständigen oder abgekürzten Pyramide (Kegel) durch eine der Grundfläche parallele Ebene ein Stück von vorgeschriebenem Inhalte abzuschneiden. Denn da der Inhalt des abzuschneidenden Körpers gegeben ist, ferner der Inhalt des gegebenen Körpers sich auf bekannte Weise berechnen läßt, so kennt man auch das Verhältniß, nach welchem der gegebene Körper durch den der Grundfläche parallelen Schnitt getheilt werden soll.

§. 194. Aufgabe.

Von einem geraden Cylinder ist der Mantel = M und die Summe aus dem Radius und der Höhe = f gegeben; es sollen hieraus diese beiden Linien berechnet werden.

Aufl. Nach §. 127 ist die Formel für den Mantel $M = 2r\pi h$; bezeichnen wir nun den Radius mit x und die Höhe mit y, so erhalten wir die Gleichung

$$2x\pi y = M$$

oder

$$1) \quad xy = \frac{M}{2\pi}.$$

Aus der Aufgabe ergibt sich ferner die Gleichung

$$2) \quad x + y = f.$$

Aus diesen Gleichungen findet man auf bekannte Weise

$$x = \tfrac{1}{2} f \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} f^2 - \frac{M}{2\pi}},\ y = \tfrac{1}{2} f \mp \sqrt{\tfrac{1}{4} f^2 - \frac{M}{2\pi}}.$$

Anm. Damit die Aufgabe möglich ist, muß $\frac{M}{2\pi} \leqq \tfrac{1}{4} f^2$, d. h. $M \leqq \tfrac{1}{4} f^2 \pi$ sein; denn entgegengesetzten Falles würde der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ, also die Werthe von x und y imaginär werden.

§. 195. Aufgabe.

Wie groß sind der Durchmesser und die Höhe eines geraden Cylinders, wenn der Unterschied derselben $= d$ und die Oberfläche des Cylinders, d. h. die Summe aus dem Mantel und den beiden Grundflächen, $= O$ gegeben sind.

Aufl. Bezeichnen wir den Radius mit x, also den Durchmesser mit 2x und die Höhe mit y, so erhalten wir zunächst aus der Aufgabe die Gleichung

$$1)\quad 2x - y = d.$$

Da ferner die Formel für den Flächeninhalt des Mantels $= 2r\pi h$ und die Formel für den Inhalt eines Kreises $= r^2\pi$, also die Oberfläche $= 2r\pi h + 2r^2\pi$ ist, so erhalten wir, wenn wir r durch x und h durch y ersetzen, die zweite Gleichung $\quad 2x\pi y + 2x^2\pi = O$

oder

$$2)\quad xy + x^2 = \frac{O}{2\pi}.$$

Durch Auflösung der Gleichungen (1) und (2) ergibt sich

$$x = \tfrac{1}{6} d + \sqrt{\tfrac{1}{36} d^2 + \frac{O}{6\pi}} = \tfrac{1}{6}\left(d + \sqrt{d^2 + \frac{6O}{\pi}}\right),$$

also

$$2x = \tfrac{1}{3}\left(d + \sqrt{d^2 + \frac{6O}{\pi}}\right),\ y = \tfrac{1}{3}\left(-2d + \sqrt{d^2 + \frac{6O}{\pi}}\right).$$

Anm. Daß vor der Wurzel nicht (—) stehen kann, leuchtet auf der Stelle ein, da dieses Vorzeichen für x und y negative Werthe ergeben würde. Weiter ist aber noch erforderlich, damit der Werth von y nicht negativ oder gleich Null wird, daß

$$2d < \sqrt{d^2 + \frac{6O}{\pi}}$$

ist, also wenn wir quadriren:

$$4d^2 < d^2 + \frac{6O}{\pi}$$

oder

$$3d^2 < \frac{6O}{\pi},$$

folglich

$$O > \tfrac{1}{2} d^2\pi.$$

§. 196. Aufgabe.

Von einem Cylinder ist der körperliche Inhalt $= J$ und das Verhältniß zwischen dem Radius und der Höhe $= m : n$ gegeben; es sollen hieraus diese beiden Linien berechnet werden.

Aufl. Nach §. 162 ist die Formel für den Inhalt des Cylinders $J = r^2\pi h$; ersetzen wir hierin das gesuchte r durch x und h durch y, so erhalten wir die Gleichung

$$x^2\pi y = J \text{ oder } x^2 y = \frac{J}{\pi}.$$

Ferner ergibt sich unmittelbar aus der Aufgabe die Gleichung

$$x : y = m : n.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$x = \sqrt[3]{\frac{mJ}{n\pi}}.$$

Multipliciren wir Zähler und Nenner des Bruches unter dem Wurzelzeichen mit m^2, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$x = \sqrt[3]{\frac{m^3 J}{m^2 n\pi}} = m\sqrt[3]{\frac{J}{m^2 n\pi}}.$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$y = \frac{n}{m}x = n\sqrt[3]{\frac{J}{m^2 n\pi}}.$$

Anm. 1. Der Nenner $m^2 n\pi$ ist gleich dem Inhalte eines Cylinders, welcher zum Radius m und zur Höhe n hat, also dem zu berechnenden Cylinder ähnlich ist. Da sich ähnliche Cylinder wie die dritten Potenzen ihrer Radien oder Höhen verhalten, so können wir folgende Proportionen bilden:

$$x^3 : m^3 = J : m^2 n\pi, \text{ also } x : m = \sqrt[3]{J} : \sqrt[3]{m^2 n\pi}$$

und

$$y^3 : n^3 = J : m^2 n\pi, \text{ also } y : n = \sqrt[3]{J} : \sqrt[3]{m^2 n\pi}$$

woraus sich auf der Stelle die oben für x und y berechneten Werthe ergeben.

Anm. 2. Wenn von einem Cylinder der körperliche Inhalt und die Summe oder Differenz der Höhe und des Durchmessers oder Radius gegeben sein sollte, so würde die Berechnung dieser Linien die Auflösung einer (unrein) kubischen Gleichung erfordern. Dasselbe ist beim Kegel der Fall. Aehnliches gilt, wenn von einem geraden Cylinder oder Kegel die Oberfläche und der körperliche Inhalt gegeben sind. Die folgende Aufgabe läßt jedoch eine sehr einfache Auflösung zu.

§. 197. Aufgabe.

Wie groß ist der Radius x und die Höhe y eines geraden Cylinders, wenn der Mantel = M und der körperliche Inhalt = J gegeben ist?

Aufl. Aus der Aufgabe erhalten wir leicht die beiden Gleichungen

$$2x\pi y = M$$

und

$$x^2\pi y = J.$$

Dividiren wir die untere Gleichung durch die obere, so ergibt sich

$$\frac{x}{2} = \frac{J}{M}, \text{ also } x = \frac{2J}{M}.$$

Setzen wir diesen Werth in die obere Gleichung ein, so erhalten wir weiter

$$\frac{4J\pi y}{M} = M, \text{ folglich } y = \frac{M^2}{4J\pi}.$$

§. 198. Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines kreisförmigen Gewölbes zu berechnen, wenn der innere Radius desselben CG = r (Fig. 87), die Dicke DG = d, die Zahl der Grade des Bogens EF = α und die Länge des Gewölbes DL = l gegeben sind.

Aufl. Der körperliche Inhalt des Gewölbes wird, wie man leicht einsieht, erhalten, wenn man den Flächeninhalt der ebenen Figur ADBFGE mit der Länge DL = l multiplicirt. Die Figur ADBFGE ist die Differenz der

beiden Kreisausschnitte ABC und EFC. Der Kreisausschnitt EFC ist bekanntlich

$$= \frac{r^2 \pi \alpha}{360}$$

und der Kreisausschnitt ABC, dessen Radius CD = r + d ist, ist

$$= \frac{(r + d)^2 \pi \alpha}{360} = \frac{(r^2 + 2rd + d^2) \pi \alpha}{360},$$

folglich $\quad ADBFGE = \frac{(2rd + d^2) \pi \alpha}{360} = \frac{(2r + d) d \pi \alpha}{360},$

also der körperliche Inhalt des Gewölbes

$$J = \frac{(2r + d) dl \pi \alpha}{360}$$

Anm. Gewöhnlich sind nicht r und α, sondern die Breite des Gewölbes EF = b und die Höhe GH = h gegeben. Man wird dann zunächst hieraus r und α zu berechnen und hierauf die erhaltenen Werthe in die obige Gleichung einzusetzen haben. In dem rechtwinkligen Dreiecke EHC ist

$$EC^2 = EH^2 + CH^2,$$

d. h. $\quad r^2 = \frac{1}{4} b^2 + (r - h)^2 = \frac{1}{4} b^2 + r^2 - 2rh + h^2,$

folglich $\quad 2rh = \frac{1}{4} b^2 + h^2$, also $r = \frac{b^2 + 4h^2}{8h}.$

Der Winkel α ergibt sich aus dem nehmlichen Dreiecke EHC durch die Gleichung

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{EH}{EC} = \frac{\frac{1}{2} b}{r} = \frac{b}{2r}.$$

§. 199. Aufgabe.

Von einem geraden Kegel ist der Unterschied zwischen dem Mantel und der Grundfläche = D und die Summe aus dem Radius und der schiefen Seite = a gegeben; wie lassen sich diese Linien finden?

Aufl. Nach §. 130 ist die Formel für den Mantel $M = r\pi f$, in welcher f die schiefe Seite bezeichnet; bekanntlich ist die Formel für den Inhalt des Kreises $r^2\pi$, folglich ist $D = r\pi f - r^2\pi$. Ersetzen wir hierin r durch x und f durch y, so erhalten wir die Gleichung

$$1) \quad x\pi y - x^2\pi = D \text{ oder } xy - x^2 = \frac{D}{\pi}.$$

Ferner ist zu Folge der Aufgabe

$$2) \qquad x + y = a.$$

Aus den beiden vorstehenden Gleichungen ergibt sich

$$x = \frac{1}{4} a \pm \sqrt{\frac{1}{16} a^2 - \frac{D}{2\pi}} = \frac{1}{4} \cdot \left(a \pm \sqrt{a^2 - \frac{8D}{\pi}}\right)$$

und $\quad y = \frac{3}{4} a \mp \sqrt{\frac{1}{16} a^2 - \frac{D}{2\pi}} = \frac{1}{4} \cdot \left(3a \mp \sqrt{a^2 - \frac{8D}{\pi}}\right).$

Anm. Damit die Aufgabe möglich ist, muß $a^2\pi \geqq 8D$ sein.

§. 200. Aufgabe.

Von einem geraden Kegel ist die senkrechte Höhe AC = h (Fig. 88) und der Mantel = M gegeben; es sollen die schiefe Seite y und der Radius x berechnet werden.

Aufl. Da der Mantel M gegeben ist, so erhalten wir zunächst die Gleichung 1) $x\pi y = M$ oder $xy = \frac{M}{\pi}$.

Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ACB

$$2) \quad y^2 - x^2 = h^2.$$

Aus der Gleichung (1) ist $y = \frac{M}{\pi x}$; setzen wir diesen Werth in (2) ein, so erhalten wir

$$\frac{M^2}{\pi^2 x^2} - x^2 = h^2$$

und wenn wir mit x^2 multipliciren:

$$\frac{M^2}{\pi^2} - x^4 = h^2 x^2$$

oder geordnet

$$x^4 + h^2 x^2 = \frac{M^2}{\pi^2},$$

folglich

$$x^2 = -\,{}^1\!/_2 h^2 + \sqrt{{}^1\!/_4 h^4 + \frac{M^2}{\pi^2}}$$

$$= \frac{-h^2\pi + \sqrt{h^4\pi^2 + 4M^2}}{2\pi}$$

und

$$y^2 = h^2 + x^2 = \frac{+h^2\pi + \sqrt{h^4\pi^2 + 4M^2}}{2\pi}$$

Anm. Die Aufgabe ist hiernach immer möglich, welche Werthe auch h und M haben mögen.

§. 201. Aufgabe.

Von zwei Kugeln ist die Differenz der Oberflächen = D und die Summe der Radien = f gegeben; es sollen hieraus die Radien der beiden Kugeln berechnet werden.

Aufl. Nach §. 143 ist die Oberfläche einer Kugel viermal so groß, als der größte Kreis. Bezeichnen wir daher den Radius der größeren Kugel mit x, der kleineren mit y, so erhalten wir die Gleichungen

$$1) \quad 4x^2\pi - 4y^2\pi = D \text{ oder } x^2 - y^2 = \frac{D}{4\pi}$$

und

$$2) \quad x + y = f$$

und hieraus

$$x = \frac{4f^2\pi + D}{8f\pi} \text{ und } y = \frac{4f^2\pi - D}{8f\pi}.$$

§. 202. Aufgabe.

Von einer Kugel, deren Radius = r gegeben ist, einen Abschnitt so abzuschneiden, daß die krumme und die ebene Grenzfläche desselben sich wie m : n verhalten.

Aufl. Bezeichnen wir die Höhe des gesuchten Abschnittes AD (Fig. 89) mit y, den Radius des Kugelkreises BD mit x, so ist zunächst der Kugelkreis = $x^2\pi$ und nach §. 146 die den Kugelabschnitt begrenzende Calotte = $2r\pi y$; wir erhalten so die Gleichung

$$1) \quad \frac{2r\pi y}{x^2\pi} = \frac{m}{n} \text{ oder } \frac{2ry}{x^2} = \frac{m}{n}.$$

Um eine zweite Gleichung zu finden, verbinden wir den Punkt B mit den Endpunkten des Kugeldurchmessers AE; dann ist bekanntlich Winkel ABE ein rechter, folglich verhält sich

$$AD : BD = BD : DE,$$

d. h.

$$y : x = x : 2r - y;$$

also ist

$$2) \quad x^2 = y(2r - y).$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (1) ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{2ry}{y(2r-y)} = \frac{m}{n} \text{ oder } \frac{2r}{2r-y} = \frac{m}{n},$$

woraus sich ergiebt:

$$y = \frac{2r(m-n)}{m}.$$

Anm. Soll z. B. die krumme Fläche doppelt so groß werden, als die ebene, so ist $m = 2n$, also $y = r$, d. h. der gesuchte Kegelabschnitt ist der Halbkugel gleich.

§. 203. Aufgabe.

Von einer ausgehöhlten Kugel ist der Kubikinhalt der kugelförmigen Rinde $= J$ und die Dicke $= d$ gegeben; es sollen hieraus die Radien der äußeren und inneren Kugelfläche berechnet werden.

Aufl. Die Dicke der Kugelrinde ist offenbar dem Unterschiede der beiden Radien gleich, also wenn wir den größeren Radius mit x, den kleineren mit y bezeichnen:

$$1) \quad x - y = d.$$

Die Formel für den körperlichen Inhalt einer Kugel ist nach §. 175 $^4/_3 r^3\pi$. Da J in der obigen Aufgabe den Unterschied der körperlichen Inhalte der beiden Kugeln, deren Radien x und y sind, bezeichnet, so ist

$$2) \quad {}^4/_3 x^3\pi - {}^4/_2 y^3\pi = J \text{ oder } x^3 - y^3 = \frac{3J}{4\pi}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergiebt sich

$$x = + {}^1/_2 d + \sqrt{\frac{3J - d^3\pi}{12d\pi}}, \quad y = - {}^1/_2 d + \sqrt{\frac{3J - d^3\pi}{12d\pi}}.$$

Anm. Damit y nicht negativ oder Null wird, muß sein:

$$\sqrt{\frac{3J - d^3\pi}{12d\pi}} > {}^1/_2 d,$$

also

$$\frac{3J - d^3\pi}{12d\pi} > {}^1/_4 d^2$$

oder

$$3J - d^3\pi > 3d^3\pi,$$

folglich

$$J > {}^4/_3 d^3\pi,$$

d. h. der gegebene Inhalt J muß größer sein, als der Inhalt einer Kugel, welche zum Radius d hat. Dieß vorausgesetzt, ist die Aufgabe immer möglich, indem dann auch $3J > d^3\pi$, also der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv ist, und folglich x und y reelle und, wie wir gesehen haben, positive Werthe erhalten.

§. 204. Aufgabe.

Die Dicke der Rinde einer ausgehöhlten Kugel ist $= d$ und die Materie, aus welcher dieselbe besteht, ist mmal so schwer, als Wasser; wie groß muß der äußere Radius (x) und der innere Radius (y) sein, damit die Hohlkugel gerade im Wasser schwimmt, d. h. so schwer ist, als die Wassermasse, welche sie aus der Stelle treibt?

Aufl. Der Inhalt der ganzen Kugel ist $= {}^4/_3 x^3\pi$, der Inhalt der Höhlung $= {}^4/_3 y^3\pi$, also der Inhalt der Rinde $= {}^4/_3\pi(x^3 - y^3)$; da die Materie derselben mmal so schwer, als Wasser und der Inhalt der durch dieselbe verdrängten Wassermasse $= {}^4/_3 x^3\pi$ ist, so erhalten wir die Gleichung

$${}^4/_3\pi(x^3 - y^3)m = {}^4/_3 x^3\pi$$

oder

$$mx^3 - my^3 = my^3$$

und daher

$$y^3 = \frac{m-1}{m} . x^3,$$

folglich wenn wir die Kubikwurzel ausziehen:

$$1)\ y = x\sqrt[3]{\frac{m-1}{m}}.$$

Zu Folge der Aufgabe ist $2)\ x - y = d.$

Setzen wir den Werth von y aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so ergiebt sich

$$x - x\sqrt[3]{\frac{m-1}{m}} = d$$

oder wenn wir die ganze Gleichung mit $\sqrt[3]{m}$ multipliciren:

$$x\sqrt[3]{m} - x\sqrt[3]{(m-1)} = d\sqrt[3]{m},$$

also

$$x = \frac{d\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{m-1}}$$

und

$$y = \frac{x\sqrt[3]{(m-1)}}{\sqrt[3]{m}}$$

$$= \frac{d\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{m-1}}.$$

Anm. Besteht die Kugel aus Eisen, so ist ohngefähr $m = 8$; ist nun $d = 1$ Zoll, so ist

$$x = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{7}} = \frac{2}{2 - 1{,}9129}$$

$$= \frac{2}{0{,}0871} = 22{,}96..$$

Demnach ist der äußere Radius x beinahe = 23 und der innere y = 22 Zoll.

§. 205. Aufgabe.

Wie groß muß der Durchmesser eines kugelförmigen Luftballons sein, damit derselbe eben in der Luft schwebend erhalten wird, wenn das Gewicht eines Kubikfußes atmosphärischer Luft $= a$, das Gewicht eines Kubikfußes des füllenden Gases $= g$ und das Gewicht eines Quadratfußes der Hülle $= h$ ist?

Aufl. Bezeichnen wir den gesuchten Radius mit x, so ist das Gewicht der Hülle $= 4x^2\pi h$, das Gewicht des füllenden Gases $= {}^4/_3 x^3\pi g$, also das Gewicht des ganzen Ballons $4x^2\pi h + {}^4/_3 x^3\pi g$, ferner das Gewicht der

verdrängten Luftmasse $^4/_3 x^3 \pi a$. Da dieses Gewicht dem Gewichte des ganzen Ballons gleich sein soll, so erhalten wir die Gleichung

$$(1) \quad 4x^2\pi h + {^4/_3} x^3 \pi g = {^4/_3} x^3 \pi a$$

oder wenn wir die ganze Gleichung durch $4x^2\pi$ dividiren und mit 3 multipliciren:

$$3h + gx = ax,$$

also

$$x = \frac{3h}{a - g}.$$

Anm. Das Gewicht eines Kubikfußes atmosphärischer Luft ist ohngefähr $= 2^3/_4$ Loth. Ist das den Ballon füllende Wasserstoffgas sehr rein, so werden wir dasselbe 11mal leichter, als atmosphärische Luft und daher das Gewicht eines Kubikfußes $= {^1/_4}$ Loth annehmen können. Ist nun das Gewicht eines Quadratfußes des den Ballon umhüllenden Wachstaffets $= 1^1/_2$ Loth, so ist

$$x = \frac{3 \cdot 1^1/_2}{2^3/_4 - {^1/_4}} = {^9/_5} = 1^4/_5 \text{ Fuß},$$

also der Durchmesser

$$2x = 3^3/_5 \text{ Fuß}$$

Soll der Ballon in der Luft nicht bloß schweben, sondern auch noch eine Last, deren Gewicht wir mit L bezeichnen, tragen, so erhalten wir statt der Gleichung (1) die kubische Gleichung

$$4x^2\pi h + {^4/_3} x^3 \pi g + L = {^4/_3} x^3 \pi a$$

oder geordnet

$$x^3\pi(a - g) - 3x^2\pi h = 3L.$$

Wir verzichten jedoch auf die Auflösung dieser Gleichung und bemerken nur noch, daß wenn umgekehrt der Radius x gegeben ist, sich aus dieser Gleichung leicht die Last L berechnen läßt, welche der Ballon zu tragen vermag. (Vergleiche Anfangsgründe der Physik. 5. Aufl. §. 75.)

Anhang.

Von der Ausmessung der Fässer.

§. 1. Erklärung.

Wenn man auf dem Durchmesser AB eines Halbkreises AD′B (Fig. 90) in beliebigen Punkten Lothe bis an die Peripherie zieht und dann sämmtliche Lothe nach demselben Verhältnisse theilt (oder verlängert), so liegen die Theilungspunkte auf der Hälfte ADB einer krummen Linie, welche man eine Ellipse nennt. Der Durchmesser AB, welcher die Ellipse in zwei symmetrische Hälften theilt, heißt die erste Axe derselben, und das im Mittelpunkte C errichtete Loth CD, welches die Ellipse ebenfalls symmetrisch theilt, wird die halbe zweite Axe genannt.

Anm. Man sieht aus dieser Erklärung leicht, daß die von der Ellipse eingeschlossene Fläche zur Fläche des Kreises das nehmliche Verhältniß hat, nach welchem die auf dem Durchmesser AB errichteten Lothe getheilt sind. Wenn wir also die halbe erste Axe der Ellipse $AC = BC = CD' = a$, die halbe zweite Axe der Ellipse $CD = b$ setzen, ferner die Fläche der Ellipse mit E und die Fläche des Kreises mit K bezeichnen, so ist

$$E : K = CD : CD' = b : a,$$

also

$$E = \frac{b \cdot K}{a}.$$

Nach §. 221 der Planimetrie ist aber $K = a^2\pi$, folglich

$$E = \frac{b \cdot a^2\pi}{a} = ab\pi.$$

§. 2. Erklärung.

Die krumme Oberfläche eines Fasses wird erzeugt, wenn man einen Bogen FH (Fig. 90) um eine zur Sehne desselben parallele Axe EG dreht. — Von diesem Bogen FH läßt sich im Allgemeinen weder für bestimmt behaupten, daß er einem Kreise, noch überhaupt, welcher krummen Linie er angehört. So viel indeß steht fest, daß er seine hohle Seite gegen die Axe wendet, daß er von dem Endpunkte F bis zur Mitte D sich stetig von der Axe entfernt und von D bis H sich derselben eben so nähert, und daß also DF und DH symmetrische Hälften sind. — Da eine ganz bestimmte Vorschrift über die Natur der krummen Linie, welcher der Bogen FH angehört, nicht vorhanden ist, so wird es uns frei stehen, irgend eine solche zu wählen, welche den angeführten Bedingungen genügt. Als besonders einfach erscheint die Annahme, daß der Bogen FDH einer Ellipse angehört, deren erste Axe AB mit der Umdrehungsaxe EG zusammenfällt, und die folglich ihren Mittelpunkt in C hat. Dieß vorausgesetzt, stellen wir den folgenden Lehrsatz auf.

§. 3. Lehrsatz.

Jedes Faß ist gleich der Summe dreier Kegel, welche sämmtlich mit dem Fasse gleiche Höhe haben, und von denen zwei den größten und einer den kleinsten Querdurchschnitt des Fasses zur Grundfläche hat.

Bezeichnen wir daher den Inhalt des Fasses mit F, die Höhe desselben mit h, den größten Radius (am Spunde) mit r, den kleinsten (am Boden) mit ϱ, so ist

$$F = \frac{1}{3}\pi h(2r^2 + \varrho^2).$$

Beweis. Es sei EFHG (Fig. 90) die Hälfte eines durch die Axe EG gelegten Querdurchschnitts des auszumessenden Fasses, also nach §. 2 FDH ein Bogen und ADB die Hälfte einer Ellipse. Verlängern wir nun EF und GH, bis sie den Halbkreis AD'B in F' und H' treffen, und denken uns hierauf die ganze Figur um AB als Axe gedreht, so erzeugt der Halbkreis AD'B eine Kugel, die halbe Ellipse ADB einen Körper, welchen man ein Sphäroid nennt, ferner das Viereck EF'H'G eine körperliche Kugelzone und das Viereck EFHG das auszumessende Faß. — Um nun zunächst den Inhalt der körperlichen Kugelzone zu berechnen, ziehen wir die Radien CF' und CH', wodurch das Viereck EF'H'G in die beiden rechtwinkligen Dreiecke CEF' und CGH' und in den Kreisausschnitt CF'H' zerschnitten wird. Die rechtwinkligen Dreiecke CEF' und CGH' erzeugen bei der Umdrehung zwei Kegel, welche $CE = CG = \frac{1}{2}h$ zur Höhe und $EF' = GH'$ zu Radien haben. Der Inhalt eines jeden derselben ist folglich, wenn wir $EF' = GH' = \varrho'$ setzen, $= \frac{1}{3}\varrho'^2\pi \,.\, \frac{1}{2}h$; also sind beide zusammen

$$= \frac{1}{3}\varrho'^2\pi h.$$

Der Kreisausschnitt CF'H' erzeugt bei der Umdrehung einen Körper, welchen wir uns als die Summe unendlich vieler unendlich kleiner Kegel denken können, die alle ihre Spitze im Mittelpunkte C und ihre Grundflächen auf der vom Bogen F'H' beschriebenen Kugelzone haben, und die folglich zusammen einem Kegel gleich sind, welcher den Kugelradius zur Höhe und die vom Bogen F'H' beschriebene Kugelzone zur Grundfläche hat. Nun ist der Flächeninhalt der Kugelzone, wenn wir den Radius $CD' = r'$ setzen, bekanntlich $= 2r'\pi h$, folglich der Inhalt des durch CF'H' erzeugten Körpers

$$\frac{1}{3}r' \,.\, 2r'\pi h = \frac{2}{3}r'^2\pi h.$$

Addiren wir hierzu den Ausdruck, welchen wir oben für die Summe der beiden Kegel gefunden haben, welche die Dreiecke CEF' und CGH erzeugen, so erhalten wir

$$\frac{2}{3}r'^2\pi h + \frac{1}{3}\varrho'^2\pi h = \frac{1}{3}\pi h(2r'^2 + \varrho'^2)$$

als den Inhalt der körperlichen Zone, welche das Viereck EF'H'G bei der Umdrehung erzeugt.

Um hieraus den Inhalt des auszumessenden Fasses, welches von dem Vierecke EFHG erzeugt wird, herzuleiten, denken wir uns durch einen beliebigen Punkt K in der Axe eine zu derselben senkrechte Ebene gelegt, so durchschneidet dieselbe die beiden Körper in zwei Kreisen, deren Radien KL und KL' sind. Die Flächen zweier Kreise verhalten sich bekanntlich wie die Quadrate ihrer Radien, also im vorliegenden Falle wie $KL^2 : KL'^2$. Nach §. 1 ist aber $KL^2 : KL'^2 = CD^2 : CD'^2 = r^2 : r'^2$.

Da dieses nehmliche Verhältniß zwischen den Durchschnitten des Fasses und der körperlichen Kugelzone immer stattfindet, wo wir auch die schneidende Ebene legen mögen, so überzeugt man sich leicht, daß auch die Körper selbst ihrem

Inhalte nach in demselben Verhältnisse stehen. Wenn wir also die körperliche Zone mit Z bezeichnen, so verhält sich

$$F : Z = r^2 : r'^2,$$

woraus sich

$$F = Z \cdot \frac{r^2}{r'^2}$$

ergibt. — Wir haben oben

$$Z = \frac{1}{3}\pi h(2r'^2 + \varrho'^2)$$

gefunden; also ist

$$F = \frac{1}{3}\pi h(2r'^2 + \varrho'^2) \cdot \frac{r^2}{r'^2}$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\left(2r'^2 \cdot \frac{r^2}{r'^2} + \varrho'^2 \cdot \frac{r^2}{r'^2}\right).$$

Nach §. 1 ist aber $r^2 : r'^2 = \varrho^2 : \varrho'^2$; hiernach läßt sich die so eben erhaltene Gleichung auch so schreiben:

$$F = \frac{1}{3}\pi h\left(2r'^2 \cdot \frac{r^2}{r'^2} + \varrho'^2 \cdot \frac{\varrho^2}{\varrho'^2}\right)$$

oder

$$F = \frac{1}{3}\pi h(2r^2 + \varrho^2), \text{ w. z. e. w.}$$

Anm. Ist z. B. von einem Fasse gegeben:

$$r = 15'', \varrho = 13'' \text{ und } h = 22'',$$

so ist der körperliche Inhalt desselben

$$F = \frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{7} \cdot 22 \cdot (2 \cdot 15^2 + 13^2) = 14266\frac{10}{21} \text{ (Kubikzoll)}.$$

Da ein preußisches Quart = 64 Kubikzoll ist, so enthält das so eben berechnete Faß (ohngefähr) 207 Quart.

Da indeß die Gestalt der Fässer weder eine ganz regelmäßige, noch bei allen übereinstimmende, ja nicht einmal bei dem nehmlichen Fasse unveränderliche ist, so kann es auch keine Formel geben, welche für alle Fässer ganz genau paßte, sondern man wird sich in den meisten Fällen mit annähernden Resultaten begnügen müssen, zu deren Berechnung sich die obige Formel besonders durch ihre große Einfachheit vor anderen zu diesem Zwecke vorgeschlagenen Formeln empfiehlt.

§. 4. Zusatz.

Aus dem Beweise des obigen Lehrsatzes geht auch noch hervor, daß sich das durch Umdrehung der halben Ellipse ADB erzeugte Sphäroid zu der Kugel, welche der Halbkreis AD'B bei der Umdrehung beschreibt, wie $CD^2 : CD'^2$ verhält. Bezeichnen wir also das Sphäroid mit S, die Kugel mit K, ferner die halbe erste Axe der Ellipse AC = CD' mit a, die halbe zweite CD mit b, so verhält sich $S : K = b^2 : a^2$.

Nun ist aber nach §. 175 der Stereometrie

$$K = \frac{4}{3}a^3\pi,$$

folglich

$$S = \frac{4}{3}a^3\pi \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

oder

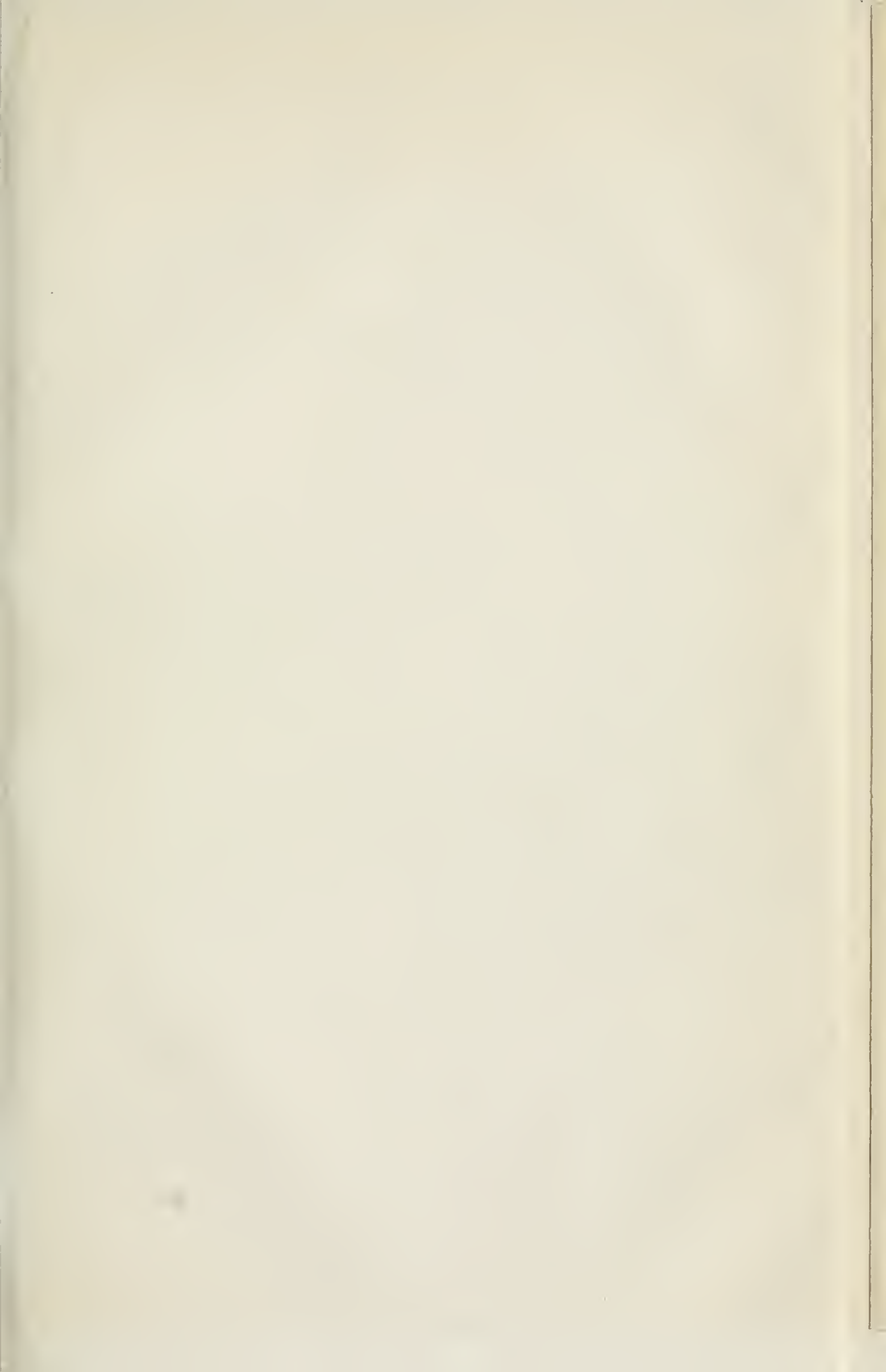
$$S = \frac{4}{3}ab^2\pi.$$

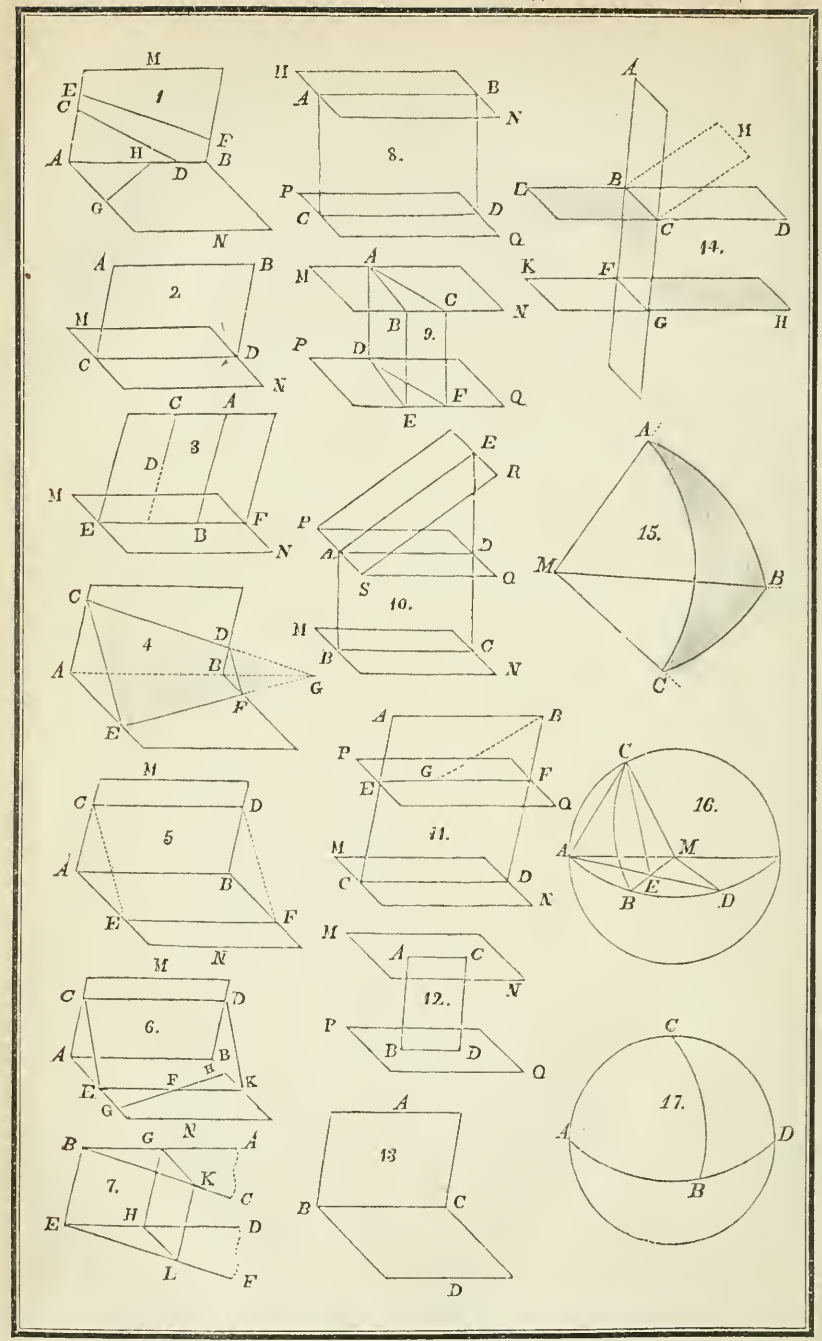
Anm. 1. In dieser Formel kann (vermöge §. 1) a sowohl >, als < b sein.

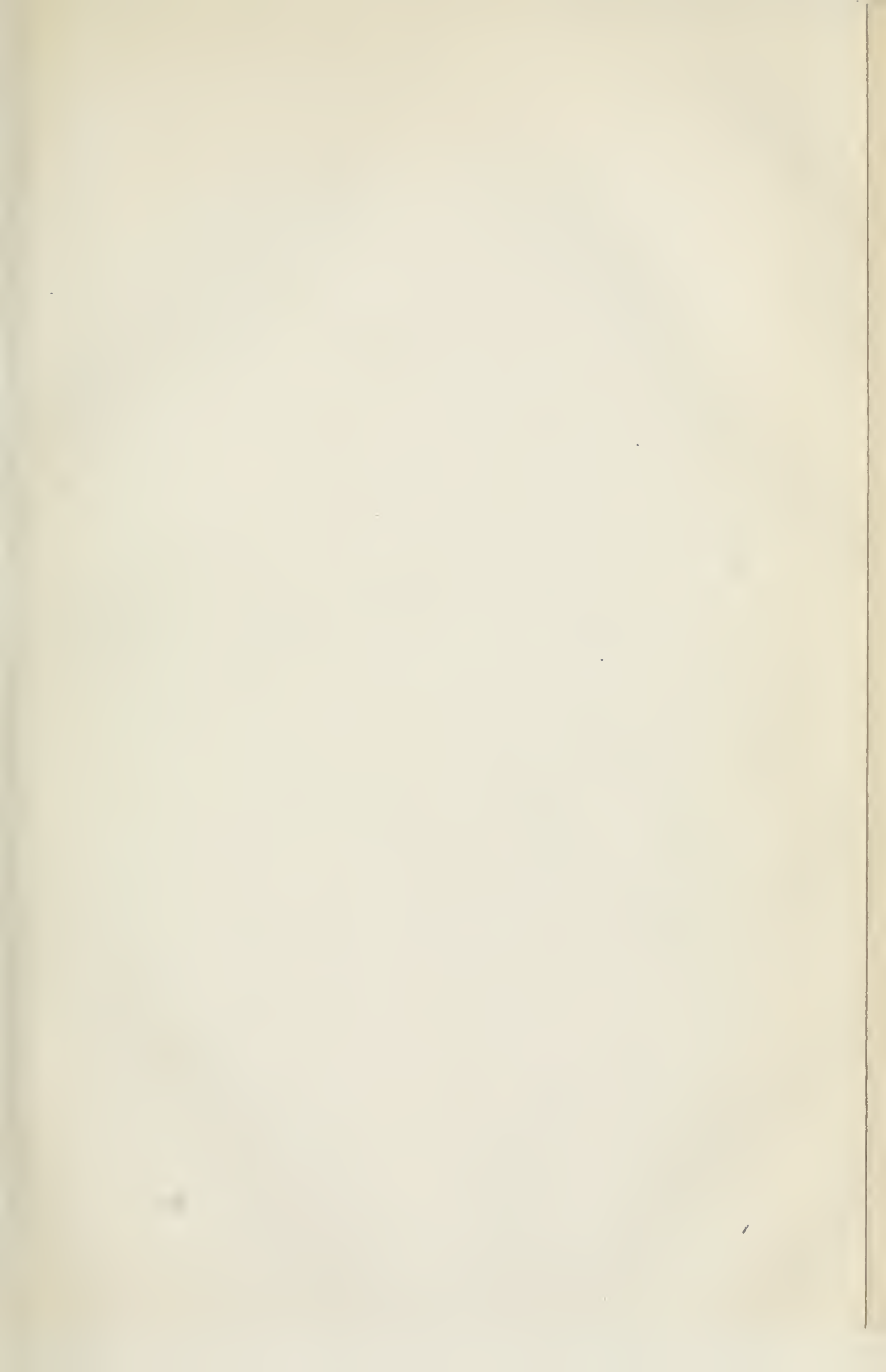
Anm. 2. Bei der Erde, welche sehr nahe die Gestalt eines Sphäroids hat, ist a = 856,55 und b = 859,44 geographische Meilen. Hieraus ergibt sich ihr Kubikinhalt, wenn man $\pi = 3,1415927$ setzt:

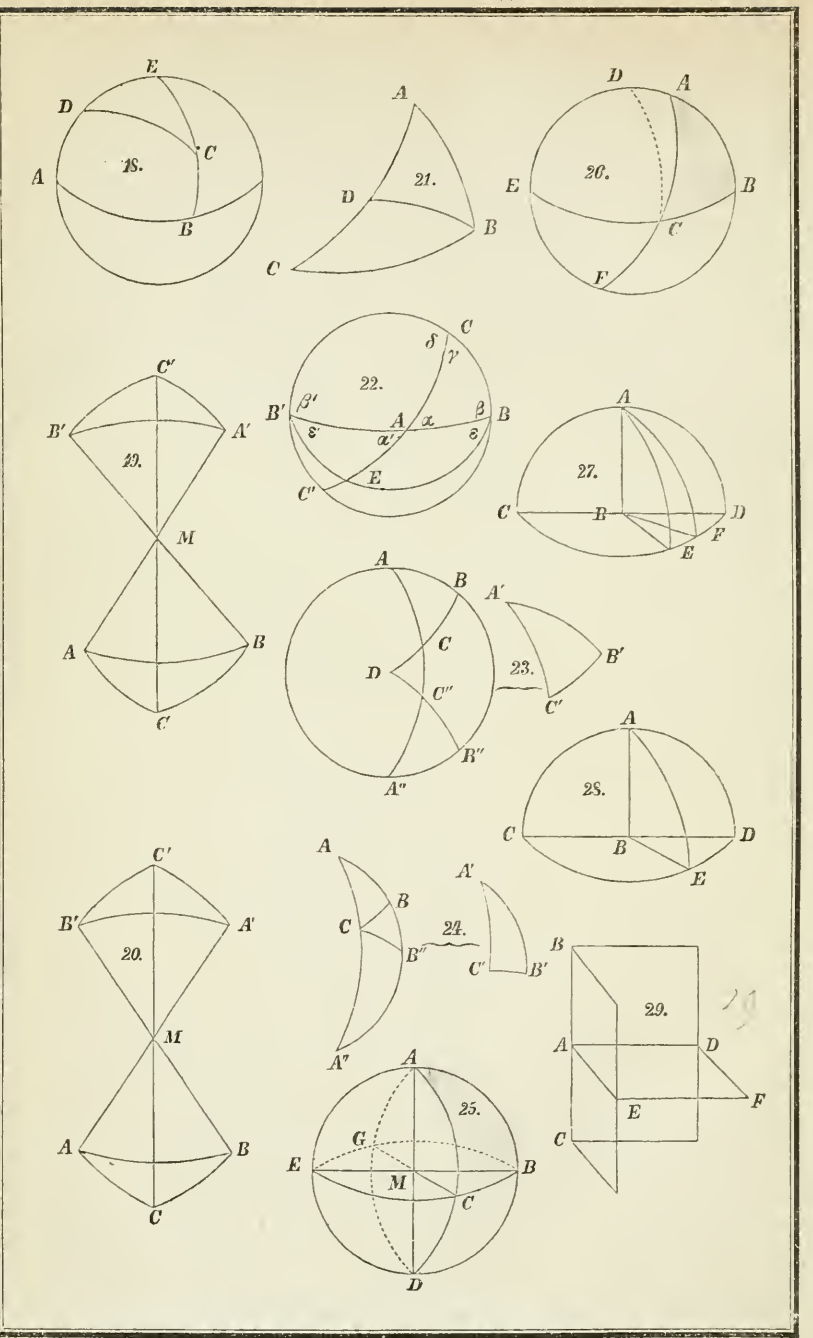
$$J = 2650160000 \text{ Kubikmeilen (ohngefähr)}.$$

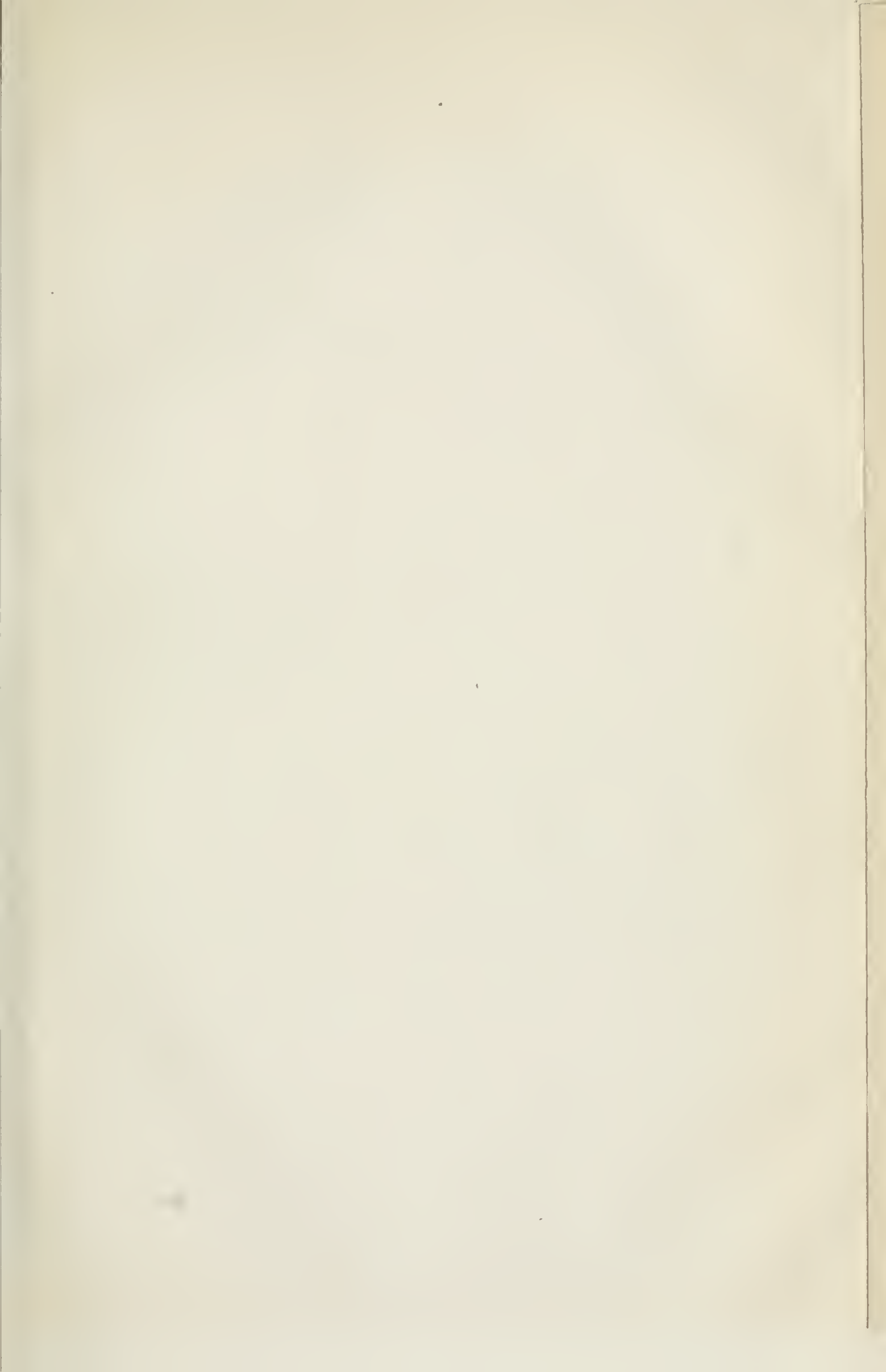
Druck von G. D. Bädeker in Essen.

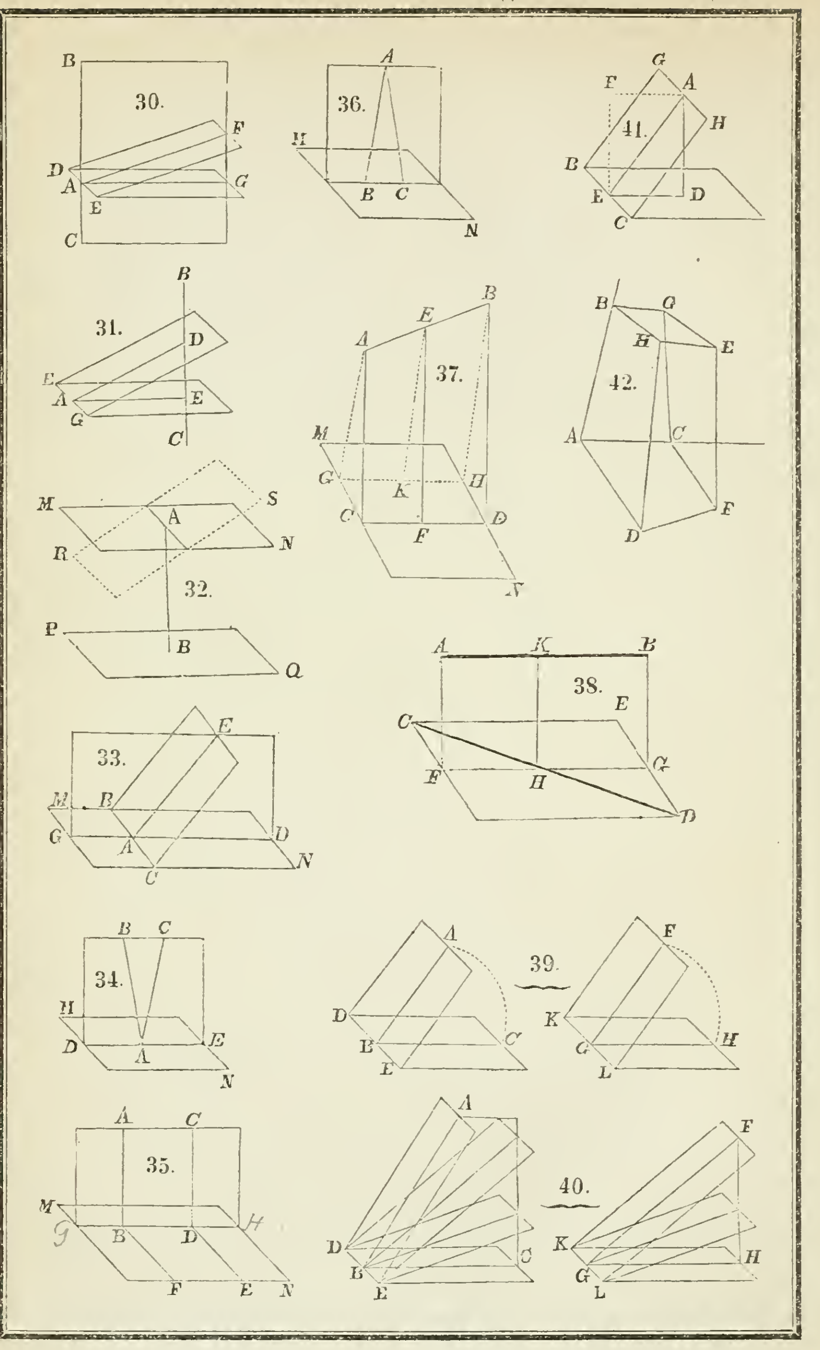


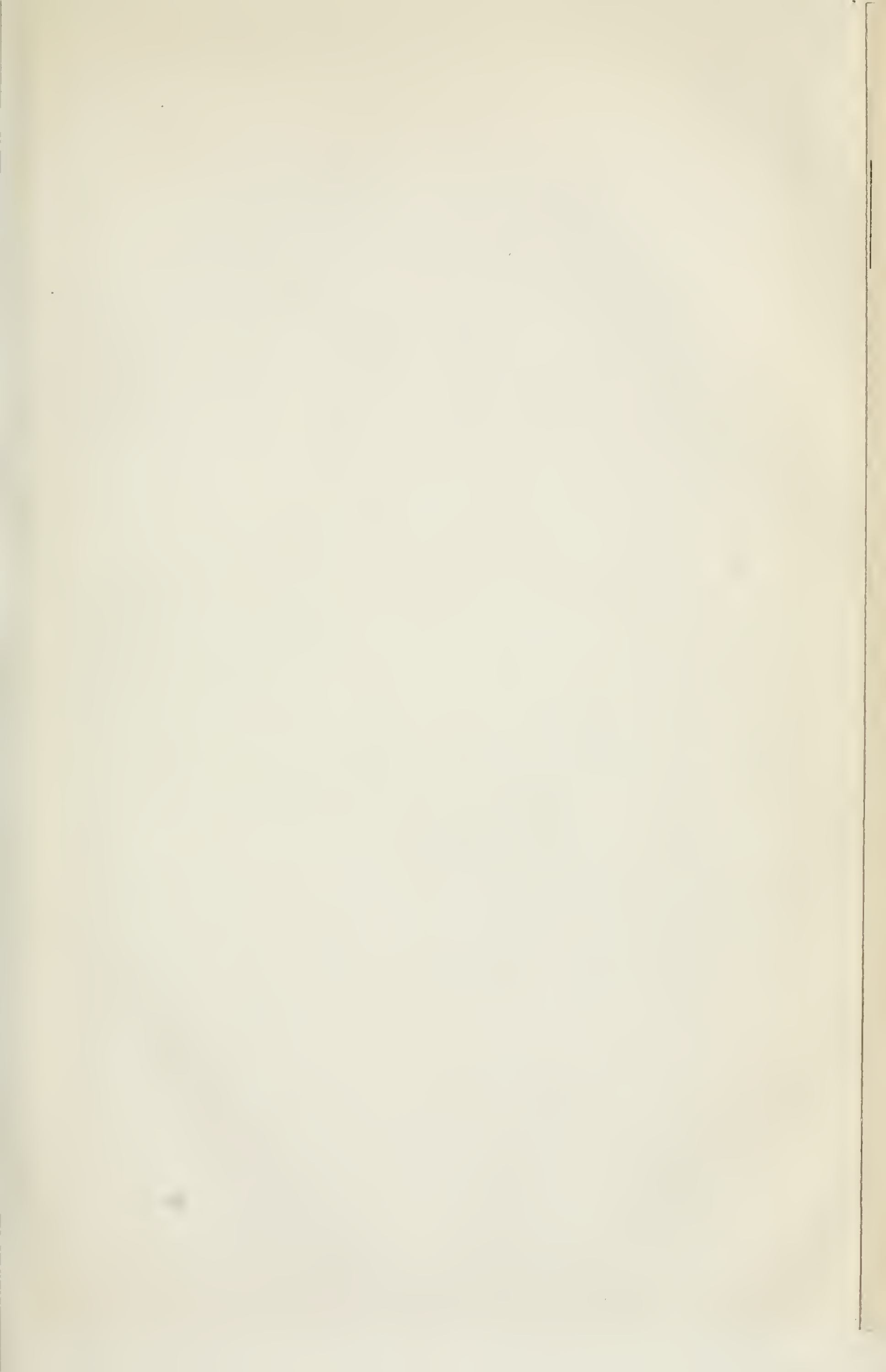


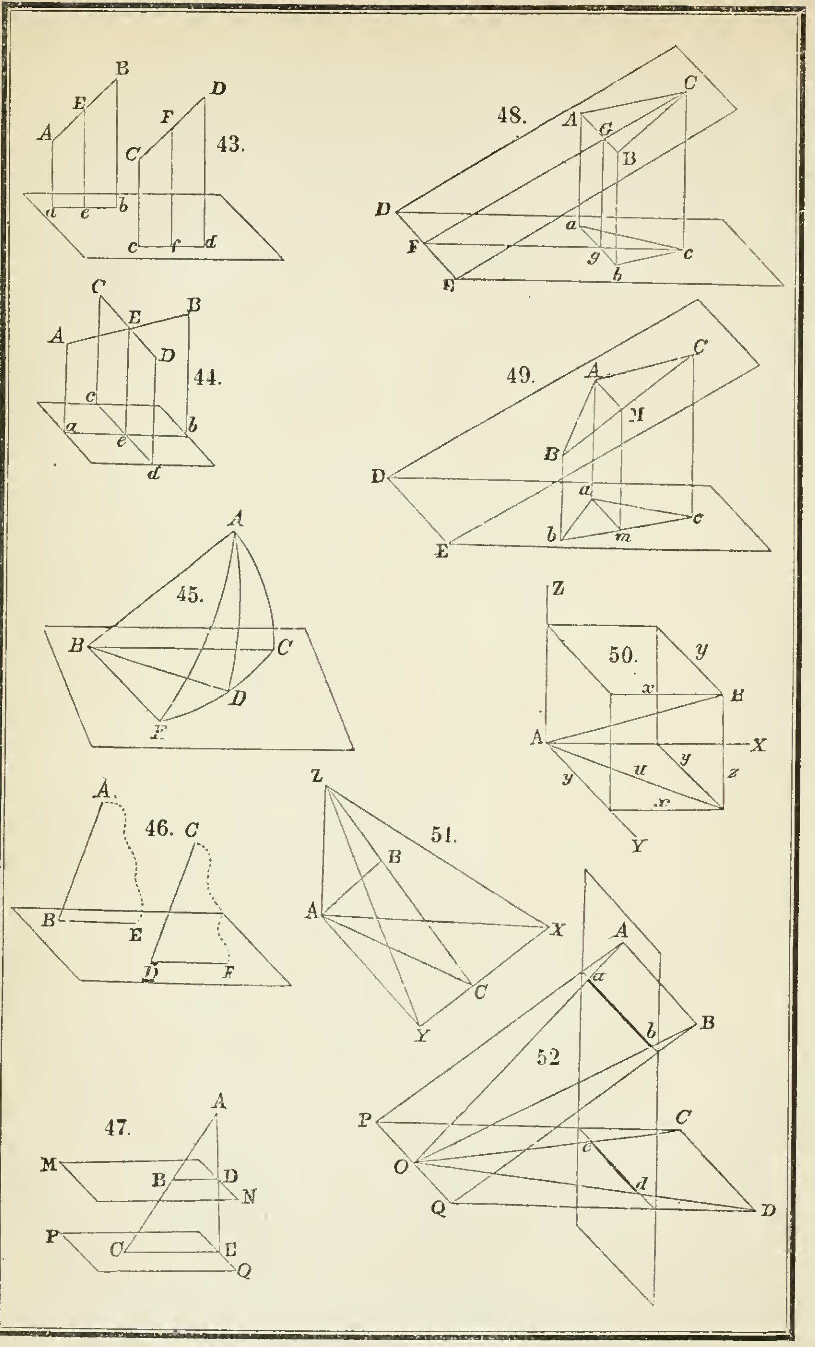


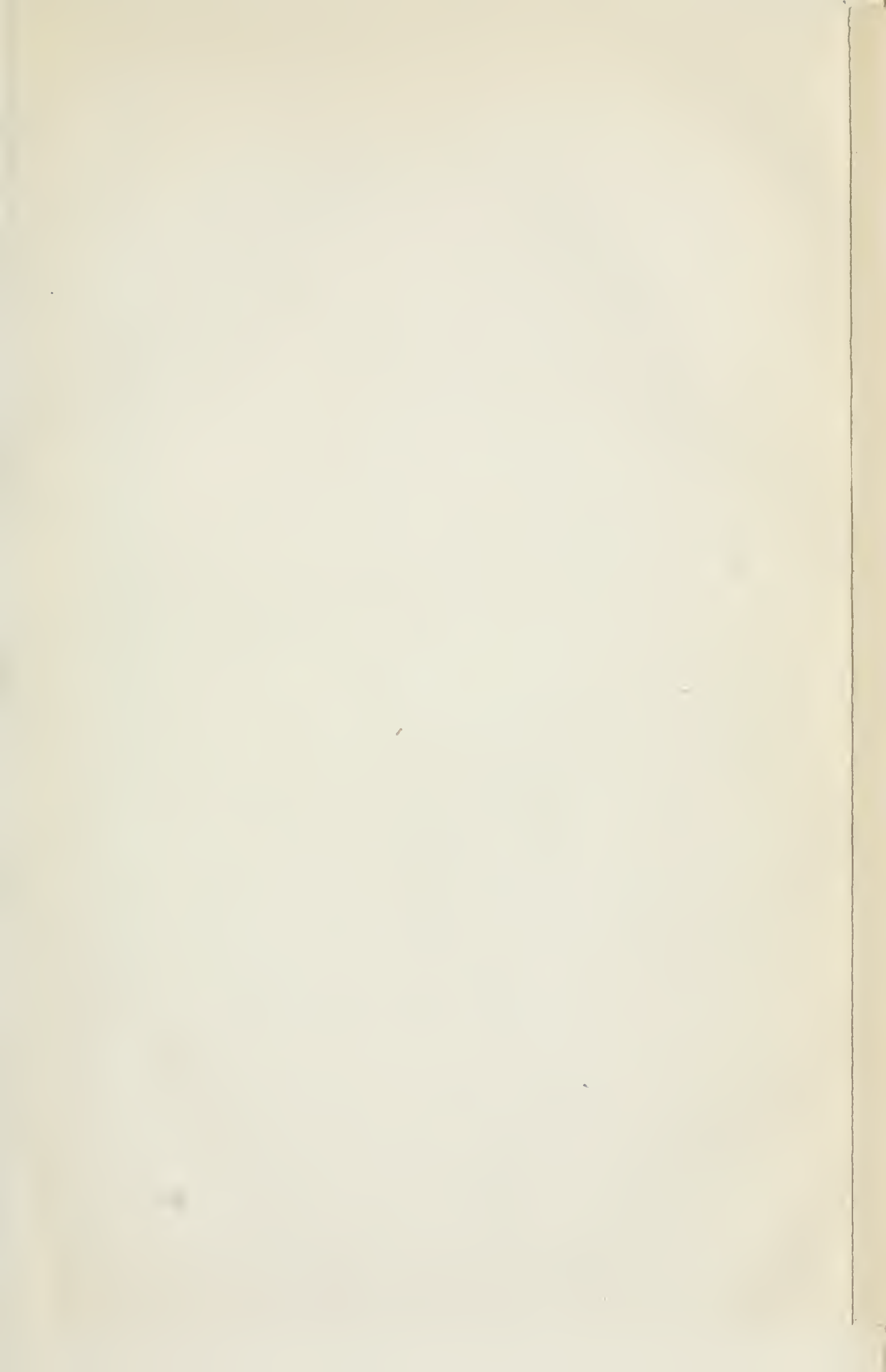


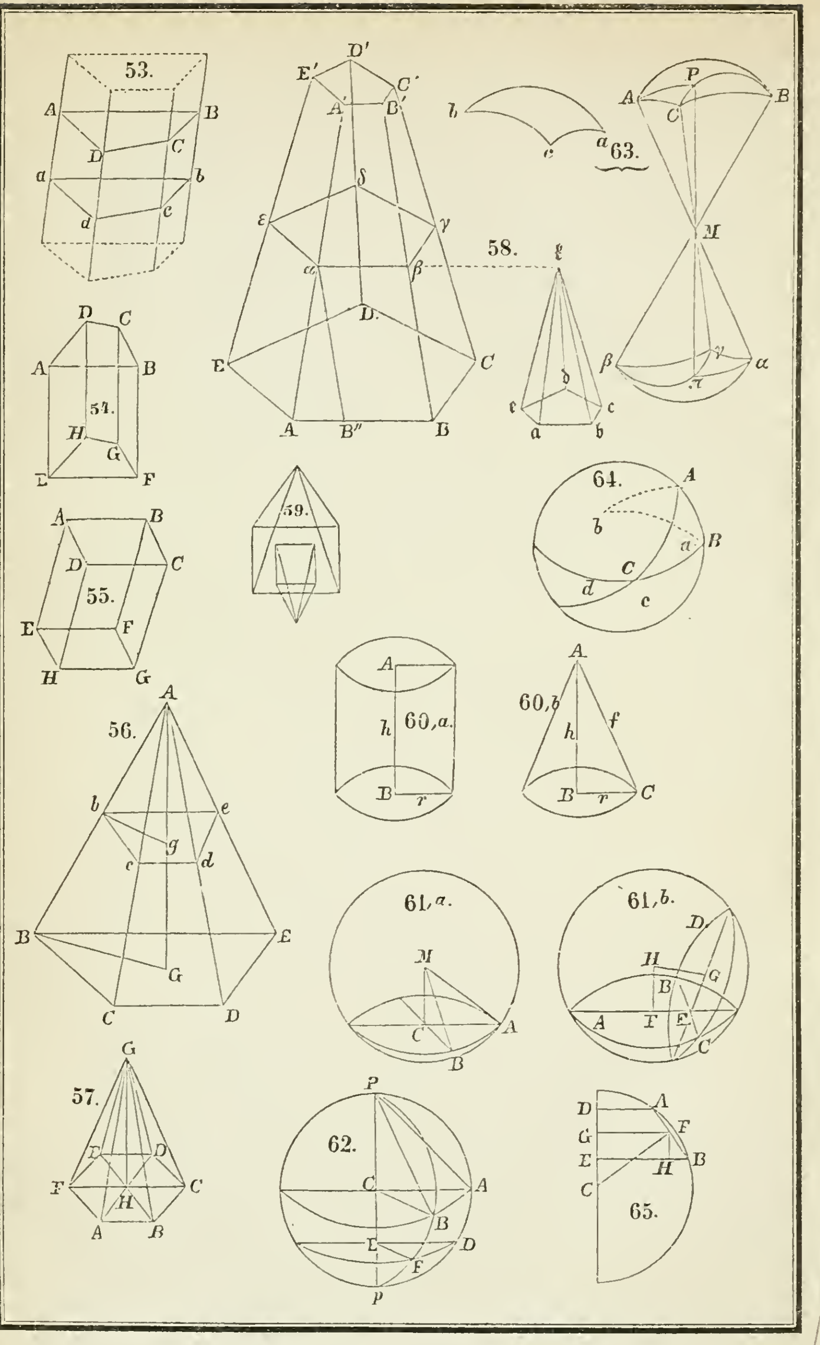


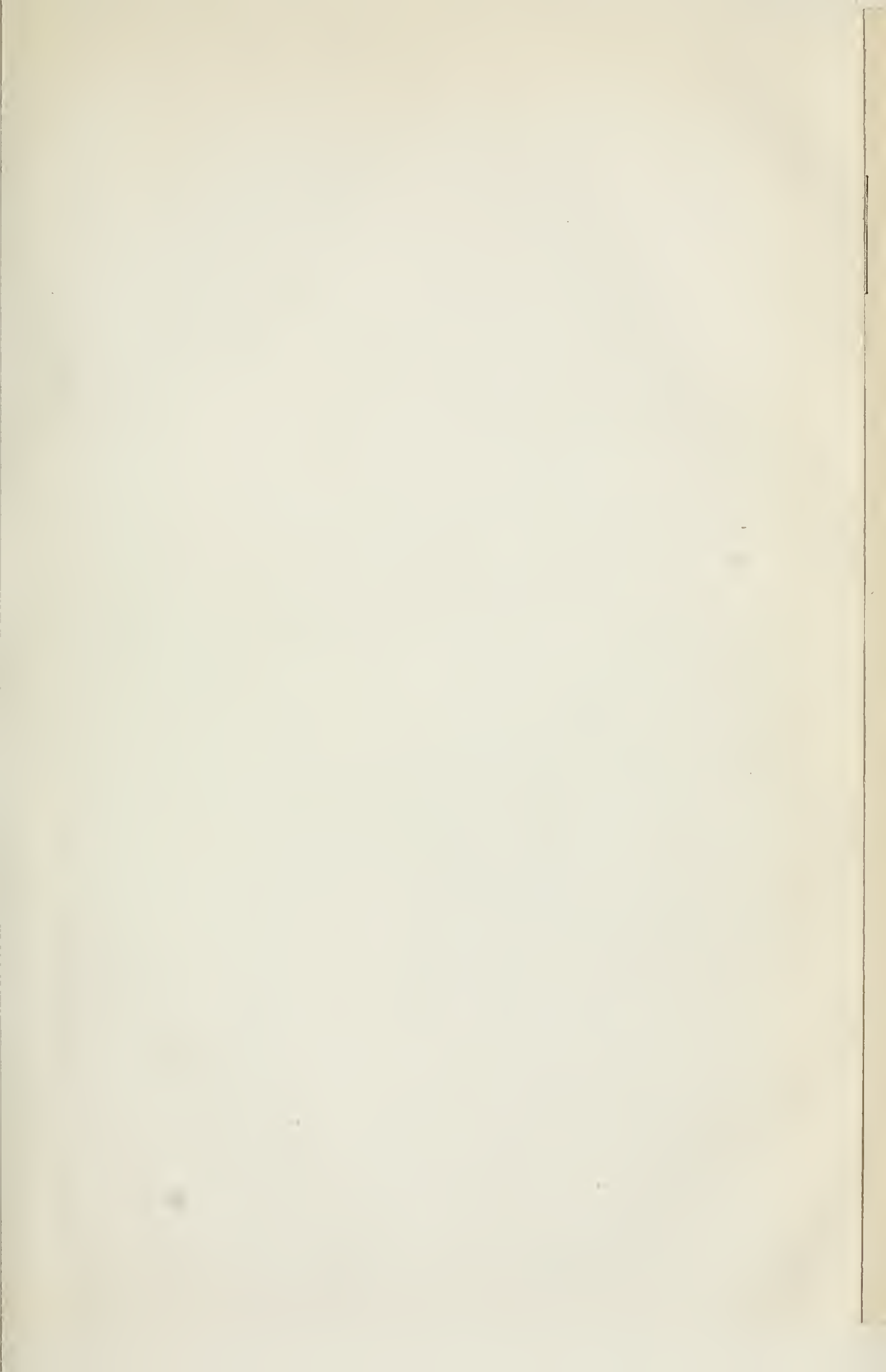

30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.

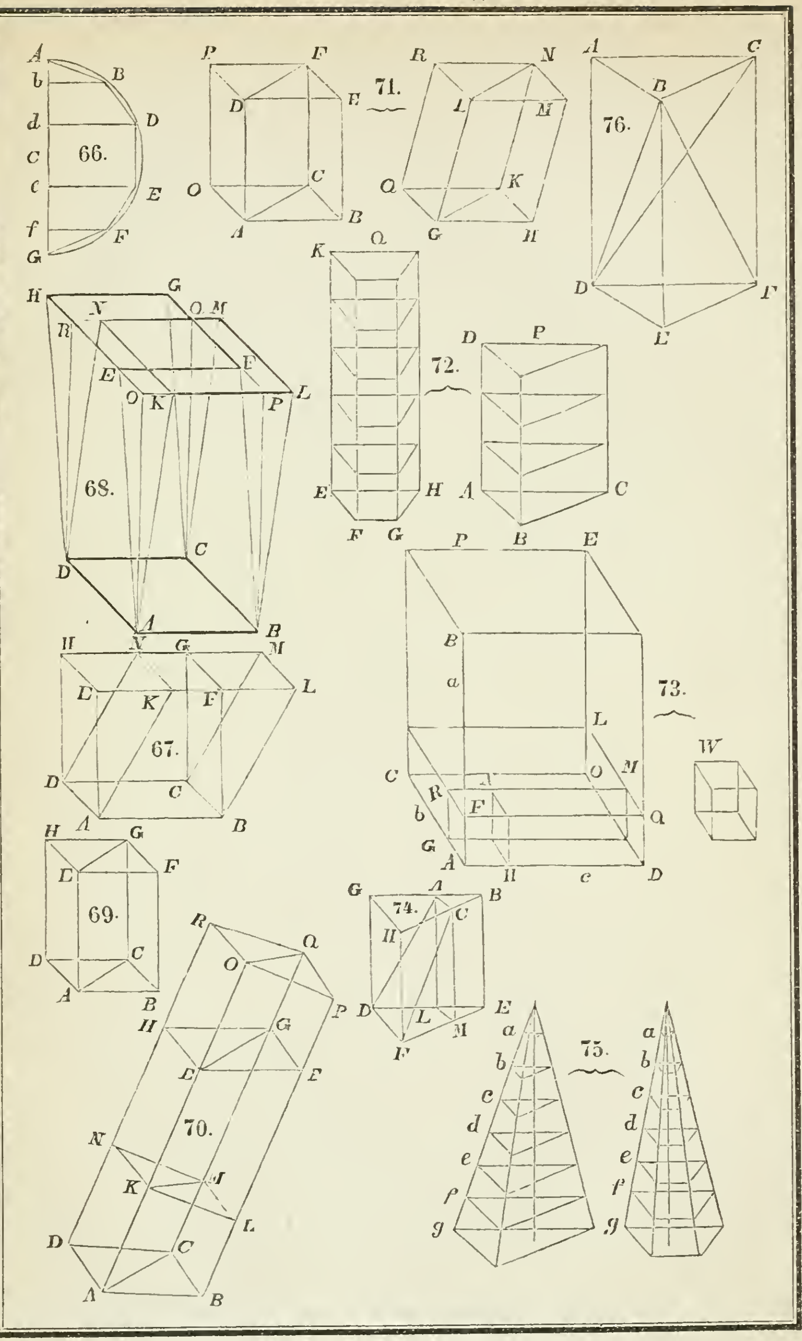


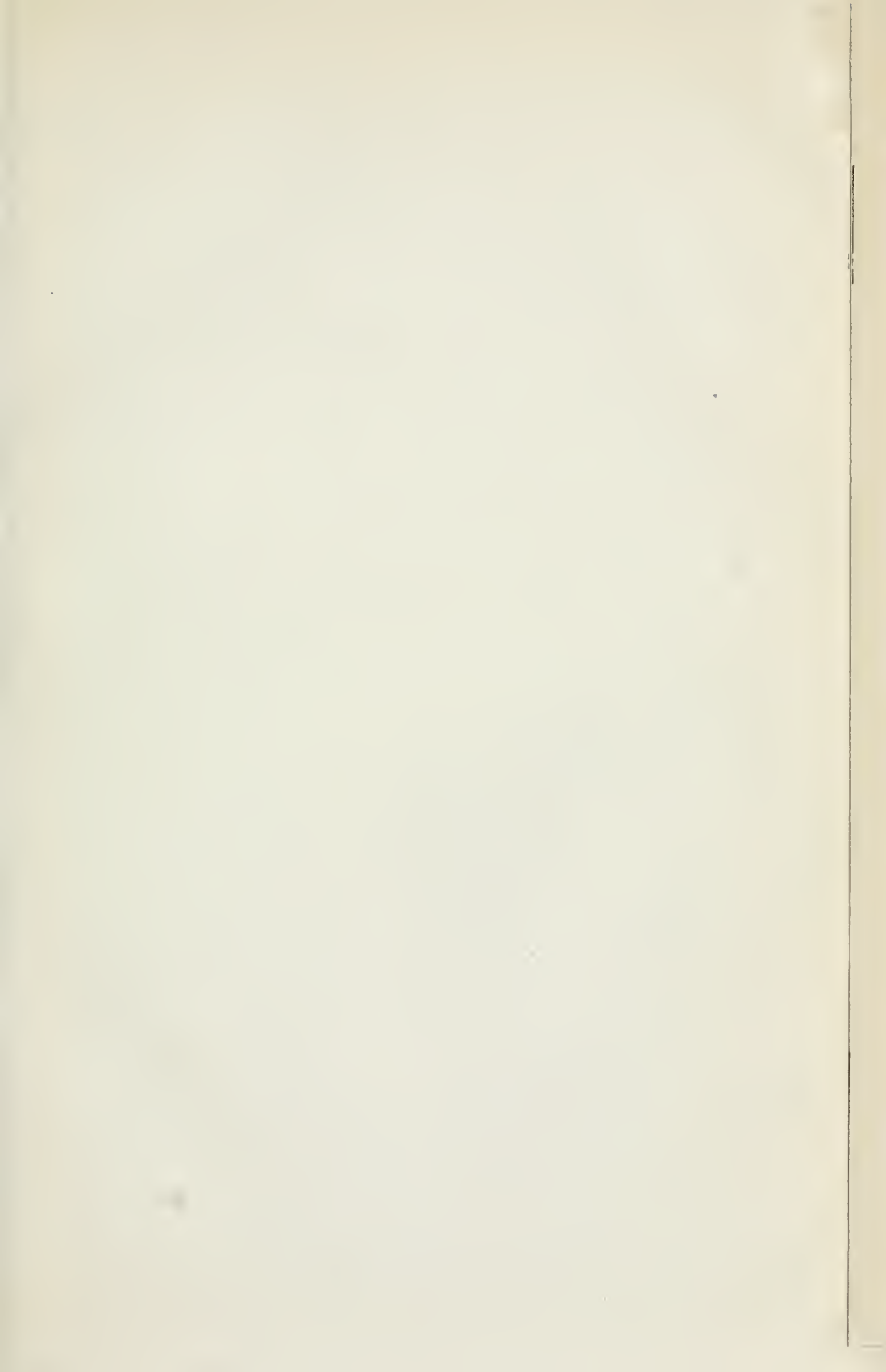

43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52

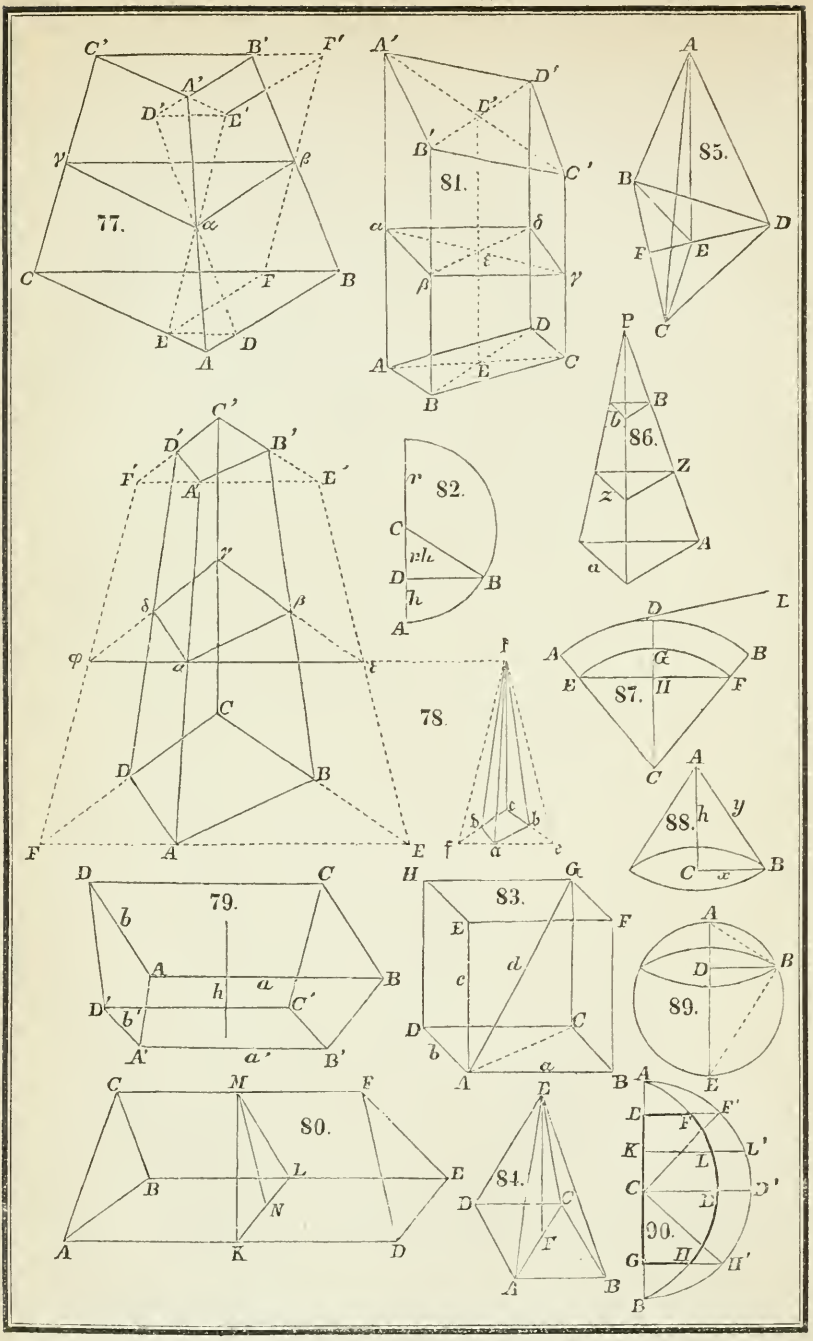



53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60,a.
60,b
61,a.
61,b.
62.
63.
64.
65.








77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.

Literatur.

Rump, F. H. Einige Sternkarten u. Auf-
gaben. Mit 1 Taf. Coesfeld 1845. 4.

